Kolokwium 1

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

3 grudnia 2025

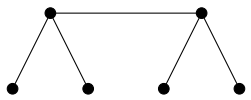
Zadanie 1 (4p+3p+4p)**.** Rozważamy palindrom KOBYŁAMAMAŁYBOK. Ile jest:

a) wszystkich permutacji liter tego słowa?

b) permutacji liter tego słowa, które są palindromami?

c) permutacji liter tego słowa, które nie zawierają żadnego ze słów: MAŁY, BOK?

Zadanie 2 (13p)**.** Na ile sposobów można pokolorować wierzchołki grafu G (rys. poniżej) trzema kolorami tak, aby dokładnie dwa wierzchołki były w kolorze zieleni Veronese'a[1]? Kolorowania uznajemy za identyczne, jeżeli pewien automorfizm grafu G przeprowadza jedno w drugie.



Zadanie 3 (13p)**.** Niech $\phi = \bigwedge_{i=1}^{m} C_j$ będzie formułą logiczną w koniunkcyjnej postaci normalnej (CNF) i niech $|C_j| = k$, $j = 1, \ldots, m$. Pokaż, że jeżeli $m < 2^k$, to ϕ jest spełnialna. Czy to ograniczenie na liczbę klauzul jest optymalne?

Zadanie 4 (14p)**.** Rozważamy słowa długości $n = 2k$ złożone z liter A i B. Repetycją w takim słowie nazywamy podsłowo, które składa się z dwóch identycznych kawałków (np. AB**BABA**BB). Udowodnij, że istnieje takie słowo długości n, które zawiera co najwyżej $n - 1$ repetycji.

[1] Paolo Veronese (1528-1588) - włoski malarz renesansowy, znany z wielkoformatowych obrazów o tematyce religijnej oraz mitologicznej.