Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

18 stycznia 2024

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset\\ |U|,|W|<\infty}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)} : (U \subset N(v) \wedge W \cap N(v) = \emptyset)$$

Zadanie 1 (13p)**.** Dany jest graf pełny rzędu $n \geqslant 6$ oraz pewne kolorowanie właściwe krawędzi tego grafu. Udowodnij, że jeśli każdy kolor występuje co najwyżej $\frac{n}{64e}$ razy, to w tym grafie istnieje tęczowa ścieżka Hamiltona.

Zadanie 2 (12p)**.** Niech $G = (V, E)$ będzie grafem nieskończonym, którego stopień maksymalny jest równy $\Delta < \infty$. Udowodnij, że $\chi'(G) \leqslant \Delta + 1$.

Zadanie 3 (12p)**.** Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem Rada, a $V_1 \cup V_2 = V(\mathcal{R})$ będzie podziałem zbioru wierzchołków grafu Rada na dwa rozłączne podzbiory. Udowodnij, że co najmniej jeden z tych podzbiorów indukuje podgraf izomorficzny z $\mathcal{R}$.

Zadanie 4 (13p)**.** Udowodnij, że jeżeli $p = c \cdot \sqrt{\frac{\ln n}{n}}$, gdzie $c > \sqrt{2}$ to prawdopodobieństwo, że graf losowy $\mathbb{G}(n, p)$ ma średnicę dwa, zmierza do jeden (przy $n \to \infty$).