Kolokwium 2

Metody probabilistyczne matematyki dyskretnej

14 stycznia 2026

Własność rozszerzania:

$$\forall_{\substack{U,W\subset V(G)\\ U\cap W=\emptyset\\ |U|,|W|<\infty}} \exists_{v\in V(G)\setminus(U\cup W)} \colon (U\subset N(v)\wedge W\cap N(v)=\emptyset)$$

Zadanie 1 (13p)**.** Wykaż, że jeśli $e\binom{k}{2}\binom{n-2}{k-2} < 2^{\binom{k}{2}-1}$, to $R(k,k) > n$, gdzie $R(k,k)$ to liczba Ramseya.

Zadanie 2 (13p)**.** Czy asymptotycznie prawie wszystkie grafy:

(a) mają zbiór niezależny rzędu k (dla pewnego, z góry ustalonego $k \in \mathbb{N}$)?

(b) są dwudzielne?

(c) są 2-spójne?

Podaj pełne uzasadnienie wszystkich odpowiedzi.

Zadanie 3 (12p)**.** Niech $\mathcal{R}$ będzie grafem Rada, a $V_1 \cup V_2 = V(\mathcal{R})$ będzie podziałem zbioru wierzchołków grafu Rada na dwa rozłączne podzbiory. Udowodnij, że co najmniej jeden z tych podzbiorów indukuje podgraf izomorficzny z $\mathcal{R}$.

Zadanie 4 (12p)**.** Udowodnij, że jeśli $p >> \frac{\log n}{n}$, to:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\alpha(G_{n,p}) \geqslant \frac{n}{2}\right) = 0.$$