# Rozwiązywanie zależności rekurencyjnych metodą równania charakterystycznego

WMS, 2019

## 1 Wstęp

Niniejszy dokument ma na celu prezentację w teorii i na przykładach rozwiązywania szczególnych typów równań rekurencyjnych – równań liniowych.

Rozpocznijmy od najprostszego równania liniowego postaci:

$$a_n = \alpha \cdot a_{n-1}$$

Widać, że równanie to spełnione jest przez ciągi postaci $a_n = c \cdot \alpha^n$. Pojawia się więc nadzieja, że równanie w nieco ogólniejszej postaci:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k}, \tag{1}$$

dla ustalonego $k \in \mathbb{N}_+$, również będzie miało rozwiązania typu $a_n = c \cdot q^n$ dla pewnych $q \in \mathbb{C}$. O tym, że jest tak w istocie, traktuje rozdział 2.

Przyjmijmy teraz, że umiemy rozwiązać równanie (1) i dane mamy jeszcze bardziej skomplikowane równanie:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k} + f(n), \tag{2}$$

dla pewnej funkcji $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$. Oznaczmy rozwiązanie równania (1) przez $a_n^o$ oraz przypuśćmy, że z jakiegoś nieznanego bliżej źródła, otrzymaliśmy jedno rozwiązanie $a_n^{sz}$ równania (2). Wówczas łatwo zweryfikować poprzez dodanie stronami obu równań, że ciąg $a_n^o + a_n^{sz}$ również spełnia równanie (2). Co więcej, dla dowolnego rozwiązania $a_n$ równania (2), ciąg $a_n - a_n^{sz}$ spełnia równanie (1). To pokazuje, że znajomość rozwiązania ogólnego równania (1) oraz rozwiązania szczególnego równania (2) wystarcza nam do skonstruowania rozwiązania ogólnego równania (2). O tym, w jaki sposób znaleźć takie pojedyncze rozwiązanie równania (2), mówi rozdział 3.

Często szukamy nie tyle wszystkich rozwiązań równania rekurencyjnego, co jednego, konkretnego. Zwykle to, o który dokładnie ciąg chodzi, precyzowane jest poprzez podanie $k$ pierwszych wyrazów ciągu. Wszystkie kolejne będą wtedy wyznaczone jednoznacznie przy pomocy zależności rekurencyjnej. Mówimy wówczas o równaniu rekurencyjnym z warunkami początkowymi i ma ono postać:

$$\begin{cases} a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k} + f(n) \\ a_0 = \beta_0 \\ a_1 = \beta_1 \\ \vdots \\ a_{k-1} = \beta_{k-1}, \end{cases}$$

gdzie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1} \in \mathbb{C}$. W rozdziale 4 znajduje się prosta instrukcja, w jaki sposób uwzględnić te dodatkowe warunki i znaleźć szukane rozwiązanie.

Na koniec rozdział 5 demonstruje większość opisanych wcześniej teoretycznie technik na konkretnych przykładach.

# 2 Rozwiązywanie równania jednorodnego

Dane jest równanie rekurencyjne jednorodne:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k},$$

Szukamy rozwiązań tego równania postaci $a_n = q^n$, $q \neq 0$. Wstawiając tę postać do równania i dzieląc je przez $q^{n-k} \neq 0$, otrzymujemy równanie, nazywane równaniem charakterystycznym:

$$q^k = \alpha_1 q^{k-1} + \alpha_2 q^{k-2} + \ldots + \alpha_k.$$

Jest to równanie wielomianowe stopnia $k$, ma więc dokładnie $k$ pierwiastków zespolonych (wliczając krotności). Oznaczmy je przez $q_1, q_2, \ldots, q_l$, a ich krotności odpowiednio $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ (oczywiście $\gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_l = k$).

Aby wskazać $k$ liniowo niezależnych rozwiązań równania, w ogólnym przypadku nie wystarczą nam rozwiązania postaci $a_n^i = q_i^n$. Musimy się więc powołać na prostą obserwację, że jeśli $x_0$ jest $r$-krotnym pierwiastkiem wielomianu $P$, to $P(x_0) = P'(x_0) = \ldots = P^{(r-1)}(x_0) = 0$. Wniosek w naszej sytuacji jest taki, że dla $\gamma_i \geqslant 2$ oprócz ciągu $a_n^i = q_i^n$, równanie charakterystyczne spełniają również ciągi $nq_i^n, n^2 q_i^n, \ldots, n^{\gamma_i - 1} q_i^n$.

Podsumowując, każdy pierwiastek $q_i$ o krotności $\gamma_i$ daje nam $\gamma_i$ rozwiązań: $q_i^n, nq_i^n, n^2 q_i^n, \ldots, n^{\gamma_i - 1} q_i^n$.
Razem otrzymujemy więc $k$ rozwiązań spełniających równanie jednorodne:

$$\begin{gathered} q_1^n, nq_1^n, n^2 q_1^n, \ldots, n^{\gamma_1 - 1} q_1^n, \\ q_2^n, nq_2^n, n^2 q_2^n, \ldots, n^{\gamma_2 - 1} q_2^n, \\ \vdots \\ q_l^n, nq_l^n, n^2 q_l^n, \ldots, n^{\gamma_l - 1} q_l^n. \end{gathered}$$

Można pokazać, że każde rozwiązanie równania rekurencyjnego jednorodnego da się wyrazić za pomocą pewnej kombinacji liniowej powyższych rozwiązań. Zatem kombinacja liniowa, w której współczynniki są dowolnymi liczbami zespolonymi, tj.:

$$a_n^j = c_1 q_1^n + c_2 n q_1^n + \ldots + c_k n^{\gamma_l - 1} q_l^n.$$

jest rozwiązaniem ogólnym takiego równania.

## 3 Szukanie rozwiązania szczególnego

Rozważmy równanie niejednorodne:

$$a_n = \alpha_1 a_{n-1} + \alpha_2 a_{n-2} + \ldots + \alpha_k a_{n-k} + f(n),$$

gdzie $f(n)$ jest:

a) wielomianem stopnia $m$ lub

b) funkcją wykładniczą lub

c) sumą lub iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej lub dwóch, lub więcej funkcji wykładniczych.

Zgodnie z rozważaniami we wstępie, wystarczy że znajdziemy jeden ciąg, który spełnia to równanie. Wówczas, dodając go do kombinacji liniowej uzyskanej metodą z poprzedniego rozdziału, uzyskamy rozwiązanie ogólne równania niejednorodnego.

Poszukiwania będziemy prowadzić metodą przewidywań, polegającą na wstawieniu do równania pewnej sparametryzowanej funkcji, której postać zależy od postaci $f(n)$, i wyznaczeniu wartości parametrów.

a) Jeśli $f(n)$ jest wielomianem stopnia $m$, wtedy szukamy rozwiązania szczególnego $a_n^{sz}$ również jako wielomianu stopnia $m$:

$$a_n^{sz} = b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0,$$

gdzie $b_0, b_1, \ldots, b_m$ są parametrami zespolonymi.

**Uwaga 1.** *Jeśli jednym z pierwiastków równania charakterystycznego jest 1, to rozwiązania postaci $1^n = 1, n1^n = n, \ldots, n^{\gamma_i - 1} 1^n = n^{\gamma_i - 1}$, gdzie $\gamma_i$ jest krotnością 1 jako pierwiastka równania charakterystycznego, już się pojawiły jako składniki $a_n^j$. W takiej sytuacji wszystkie jednomiany stopnia niższego niż $n^{\gamma_i}$ spełniają równanie jednorodne, więc na pewno nie będą wchodziły w skład rozwiązania równania niejednorodnego. Musimy zatem przemnożyć nasz wielomian przez $n^{\gamma_i}$:*

$$a_n^{sz} = (b_m n^m + b_{m-1} n^{m-1} + \ldots + b_1 n + b_0) n^{\gamma_i}.$$

b) Jeśli $f(n) = A\alpha^n$, gdzie $A \in \mathbb{C}$, to szukamy $a_n^{sz}$ tej samej postaci:

$$a_n^{sz} = B\alpha^n,$$

gdzie $B$ jest parametrem zespolonym.

**Uwaga 2.** *Jeśli jednym z pierwiastków równania charakterystycznego jest $\alpha$, to rozwiązania postaci $\alpha^n, n\alpha^n, \ldots, n^{\gamma_i - 1}\alpha^n$, gdzie $\gamma_i$ jest krotnością $\alpha$ jako pierwiastka równania charakterystycznego, już się pojawiły jako składniki $a_n^j$. W takiej sytuacji wszystkie ciągi $n^r\alpha^n$ dla $r < \gamma_i$ spełniają równanie jednorodne, więc na pewno nie będą wchodziły w skład rozwiązania równania niejednorodnego. Musimy zatem przemnożyć naszą funkcję wykładniczą przez $n^{\gamma_i}$:*

$$a_n^{sz} = Bn^{\gamma_i}\alpha^n.$$

c) Jeśli $f(n)$ jest sumą lub iloczynem wielomianu i funkcji wykładniczej, lub dwóch lub więcej funkcji wykładniczych, to nasze rozwiązanie szczególne będzie analogiczną sumą lub iloczynem wyrażeń wskazanych w poprzednich podpunktach. Należy przy tym pamiętać o uwagach 1 i 2.

Teraz, gdy wiemy już jakiej postaci będzie rozwiązanie szczególne naszej zależności rekurencyjnej, wstawiamy je do równania rekurencyjnego i obliczamy wartości parametrów.

W tym rozdziale uwzględnione zostały tylko trzy klasy funkcji $f(n)$, jednak przewidujący czytelnik będzie w stanie zastosować tę metodę również dla innych „porządnych" klas funkcji.

# 4 Warunki początkowe

Przypuśćmy że dla danego równania rekurencyjnego z warunkami początkowymi udało nam się znaleźć rozwiązanie ogólne $a_n^o$ równania jednorodnego oraz rozwiązanie szczególne $a_n^{sz}$ równania niejednorodnego. Zgodnie z wcześniejszymi ustaleniami wywnioskowaliśmy również, że rozwiązaniem ogólnym równania jest:

$$a_n = a_n^o + a_n^{sz}. \tag{3}$$

Pozostało nam wyznaczyć współczynniki $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{C}$. Aby to zrobić, wstawiamy do równania (3) kolejno $n = 0, 1, \ldots, k-1$, a otrzymane wyrażenia przyrównujemy do wartości odpowiednio $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{k-1}$ określonych w warunkach początkowych. Otrzymujemy w ten sposób układ $k$ równań liniowych z $k$ niewiadomymi, który rozwiązujemy swoją ulubioną metodą. Obliczone współczynniki wstawiamy do równania (3) otrzymując wzór ciągu zależny już tylko od $n$.

# 5 Przykłady

**Przykład 1.** Równanie jednorodne z pierwiastkami zespolonymi.

$$\begin{cases} a_n = -4a_{n-2}, \ n \geqslant 2 \\ a_0 = -3i \\ a_1 = 2 \end{cases}$$

Zauważamy że równanie jest jednorodne. Układamy równanie charakterystyczne i rozwiązujemy je.

$$q^2 = -4$$

$$q_1 = 2i \ \vee \ q_2 = -2i$$

Zatem rozwiązanie ogólne równania to:

$$a_n^j = c_1(2i)^n + c_2(-2i)^n.$$

Ponieważ dane są warunki początkowe, wstawiamy do powyższego rozwiązania $n = 0$ oraz $n = 1$ i przyrównujemy do podanych wartości.

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = -3i \\ a_1 = 2ic_1 - 2ic_2 = 2 \end{cases}.$$

Rozwiązaniem takiego układu równań jest:

$$\begin{cases} c_1 = -2i \\ c_2 = -i \end{cases}$$

Otrzymane współczynniki $c_1$ i $c_2$ wstawiamy do rozwiązania

$$a_n = -2i(2i)^n - i(-2i)^n.$$

**Przykład 2.** Równanie niejednorodne z pierwiastkami jednokrotnymi.

$$\begin{cases} a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2} + 12 \cdot 5^n, \ n \geqslant 2 \\ a_0 = 50 \\ a_1 = 300 \end{cases}$$

Ponieważ dane równanie jest równaniem niejednorodnym, musimy zacząć od rozwiązania skojarzonego równania jednorodnego:

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}.$$

Tworzymy równanie charakterystyczne i rozwiązujemy je.

$$q^2 = 5q - 6$$

$$q_1 = 2 \ \vee \ q_2 = 3$$

Otrzymujemy ogólną postać rozwiązania jednorodnego:

$$a_n^o = c_1 2^n + c_2 3^n.$$

Ponieważ część niejednorodna zadanego równania ma postać $f(n) = 12 \cdot 5^n$, będziemy przewidywać rozwiązanie szczególne w postaci $a_n^{sz} = B \cdot 5^n$. Wstawiamy takie $a_n^{sz}$ do równania niejednorodnego z treści zadania.

$$B \cdot 5^n = 5B \cdot 5^{n-1} - 6B \cdot 5^{n-2} + 12 \cdot 5^n$$

Rozwiązujemy równanie, otrzymując $B = 50$. Mamy więc rozwiązanie szczególne:

$$a_n^{sz} = 50 \cdot 5^n,$$

zatem zależność rekurencyjną spełnia dowolny ciąg postaci:

$$a_n = a_n^o + a_n^{sz} = c_1 2^n + c_2 3^n + 50 \cdot 5^n.$$

Pozostało nam jedynie uwzględnić warunki początkowe:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 + 50 = 50 \\ a_1 = 2c_1 + 3c_2 + 250 = 300 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy układ równań, otrzymując:

$$\begin{cases} c_1 = -50 \\ c_2 = 50 \end{cases}.$$

Zatem ostatecznie:

$$a_n = -50 \cdot 2^n + 50 \cdot 3^n + 50 \cdot 5^n.$$

**Przykład 3.** Równanie niejednorodne z pierwiastkiem wielokrotnym.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3} + 4 \cdot 2^n, \ n \geqslant 3 \\ a_0 = 0 \\ a_1 = 8 \\ a_2 = 8 \end{cases}$$

Szukamy rozwiązania jednorodnej części zależności rekurencyjnej

$$a_n = 2a_{n-1} + 4a_{n-2} - 8a_{n-3}$$

Tworzymy równanie charakterystyczne i rozwiązujemy je.

$$q^3 = 2q^2 + 4q - 8$$

$$(q-2)^2(q+2) = 0$$

$$\begin{cases} q_1 = 2 \\ \gamma_1 = 2 \end{cases} \vee \begin{cases} q_2 = -2 \\ \gamma_2 = 1 \end{cases}$$

Otrzymujemy postać rozwiązania jednorodnego

$$a_n^o = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3(-2)^n.$$

Ponieważ część niejednorodna zadanego równania ma postać $f(n) = 4 \cdot 2^n$ oraz $q_1 = 2$ jest pierwiastkiem dwukrotnym równania charakterystycznego, to zgodnie z uwagą 2 przewidujemy $a_n^{sz} = B \cdot n^2 2^n$. Taką postać rozwiązania wstawiamy do równania niejednorodnego:

$$B \cdot n^2 2^n = 2B \cdot (n-1)^2 2^{n-1} + 4B \cdot (n-2)^2 2^{n-2} - 8B \cdot (n-3)^2 2^{n-3} + 4 \cdot 2^n$$

Dzielimy stronami przez $2^{n-3}$ i rozwiązujemy równanie.

$$B \cdot 8n^2 = 2B \cdot 4(n-1)^2 + 4B \cdot 2(n-2)^2 - 8B(n-3)^2 + 4 \cdot 8$$

$$8Bn^2 = 8B(n^2 - 2n + 1) + 8B(n^2 - 4n + 4) - 8B(n^2 - 6n + 9) + 32$$

$$0 = -32B + 32$$

$$B = 1$$

Zauważmy, że wszystkie $n$ zredukowały się i otrzymaliśmy wartość liczbową dla parametru $B$. Oznacza to, że przewidywanie było trafne. Otrzymany parametr wstawiamy do postaci rozwiązania szczególnego

$$a_n^{sz} = n^2 2^n.$$

Otrzymaliśmy zatem postać rozwiązania zadanej zależności rekurencyjnej

$$a_n = c_1 2^n + c_2 n 2^n + c_3(-2)^n + n^2 2^n.$$

Pozostało nam jedynie uwzględnić warunki początkowe:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_3 = 0 \\ a_1 = 2c_1 + 2c_2 - 2c_3 + 2 = 8 \\ a_2 = 4c_1 + 8c_2 + 4c_3 + 16 = 8 \end{cases}.$$

Rozwiązujemy układ równań, otrzymując:

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = -1 \\ c_3 = -2 \end{cases}$$

Zatem ostatecznie:

$$a_n = 2 \cdot 2^n - 2^n n - 2 \cdot (-2)^n + 2^n n^2.$$

**Przykład 4.** Równanie niejednorodne, w którym trzeba zastosować uwagę 1.

$$\begin{cases} a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2} + 12n - 23, \ n \geqslant 2 \\ a_0 = 5 \\ a_1 = 1 \end{cases}$$

Szukamy rozwiązania jednorodnej części zależności rekurencyjnej

$$a_n = -a_{n-1} + 2a_{n-2}.$$

Tworzymy równanie charakterystyczne i rozwiązujemy je.

$$q^2 = -q + 2$$

$$q_1 = 1 \ \vee \ q_2 = -2$$

Otrzymujemy postać rozwiązania jednorodnego

$$a_n^j = c_1 1^n + c_2(-2)^n.$$

Ponieważ część niejednorodna zadanego równania ma postać $f(n) = 12n - 23$ oraz $q_1 = 1$ jest pierwiastkiem jednokrotnym równania charakterystycznego, to zgodnie z uwagą 1 przewidujemy $a_n^{sz} = (An + B)n$. Taką postać rozwiązania wstawiamy do równania niejednorodnego:

$$An^2 + Bn = -[A(n-1)^2 + B(n-1)] + 2[A(n-2)^2 + B(n-2)] + 12n - 23.$$

Rozwiązujemy równanie i dostajemy:

$$\begin{cases} A = 2 \\ B = -3 \end{cases}.$$

Otrzymane współczynniki wstawiamy do postaci rozwiązania szczególnego

$$a_n^{sz} = 2n^2 - 3n.$$

Otrzymaliśmy zatem postać rozwiązania zadanej zależności rekurencyjnej

$$a_n = c_1 + c_2(-2)^n + 2n^2 - 3n.$$

Pozostało nam jedynie uwzględnić warunki początkowe:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 = 5 \\ a_1 = c_1 - 2c_2 - 1 = 1 \end{cases}$$

Rozwiązujemy układ równań, otrzymując:

$$\begin{cases} c_1 = 4 \\ c_2 = 1 \end{cases}$$

Zatem ostatecznie:

$$a_n = 4 + (-2)^n + 2n^2 - 9n.$$

**Przykład 5.** Równanie jednorodne, w którym $f(n)$ jest sumą funkcji wykładniczej oraz wielomianu.

$$\begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2} + 5 \cdot 3^n + 9n, \ n \geqslant 2 \\ a_0 = 10 \\ a_1 = -60 \end{cases}$$

Szukamy rozwiązania jednorodnej części zależności rekurencyjnej

$$a_n = 2a_{n-1} + 8a_{n-2}.$$

Tworzymy równanie chrakterystyczne i rozwiązujemy je.

$$q^2 = 2q + 8$$

$$q_1 = 4 \ \vee \ q_2 = -2$$

Otrzymujemy postać rozwiązania jednorodnego

$$a_n^j = c_1 4^n + c_2(-2)^n.$$

Ponieważ część niejednorodna zadanego równania ma postać $f(n) = 5 \cdot 3^n + 9n$, to przewidujemy $a_n^{sz} = An + B + C3^n$. Taką postać rozwiązania wstawiamy do równania niejednorodnego:

$$An+B+C3^n = 2[A(n-1)+B+C3^{n-1}]+8[A(n-2)+B+C3^{n-2}]+5\cdot 3^n+9n.$$

Rozwiązujemy równanie. =

$$\begin{cases} A = -1 \\ B = -2 \\ C = -9 \end{cases}$$

Otrzymane współczynniki wstawiamy do postaci rozwiązania szczególnego

$$a_n^{sz} = -n - 2 - 9 \cdot 3^n.$$

Otrzymaliśmy zatem postać rozwiązania zadanej zależności rekurencyjnej

$$a_n^j = c_1 4^n + c_2(-2)^n - n - 2 - 9 \cdot 3^n.$$

Pozostało nam jedynie uwzględnić warunki początkowe:

$$\begin{cases} a_0 = c_1 + c_2 - 9 - 2 = 10 \\ a_1 = 4c_1 - 2c_2 - 27 - 3 = -60 \end{cases} .$$

Rozwiązujemy układ równań, otrzymując:

$$\begin{cases} c_1 = 2 \\ c_2 = 19 \end{cases}$$

Zatem ostatecznie:

$$a_n = 2 \cdot 4^n + 19 \cdot (-2)^n - 9 \cdot 3^n - n - 2.$$