

TEORIA

Definicje: graf prosty; dopełnienie grafu; wierzchołek izolowany; zbiór sąsiadów; stopień wierzchołka; stopień minimalny i maksymalny grafu; rząd i rozmiar grafu; graf pełny, cykl, ścieżka, graf dwudzielny pełny; izomorfizm grafów; multigraf; graf regularny; graf spójny; graf dwudzielny

Twierdzenia: lemat o uściskach dłoni

A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

- A1 Podaj parametry takie jak rząd, rozmiar, stopień maksymalny i minimalny dla następujących grafów: K_n ; $K_{p,q}$; C_n ; P_n .
- A2 Znajdź parametry z zadania A1 dotyczące dowolnego grafu G (niekoniecznie jednego z tych wymienionych w zad. A1) , podaj ile wynoszą one dla \overline{G} .
- A3 Znajdź wszystkie, z dokładnością do izomorfizmu, grafy o stopniu maksymalnym dwa.
- A4 Wskaż przykłady grafów rzędu 4 i 5 izomorficznych ze swoim dopełnieniem. Czy istnieje graf rzędu 6 o takiej własności?
- A5 Wykaż, że w dowolnym grafie liczba wierzchołków stopnia nieparzystego jest parzysta.
- A6 Wykaż, że w dowolnym grafie rzędu co najmniej 2 istnieją dwa wierzchołki tego samego stopnia.

B. ZADANIA NA ĆWICZENIA - JEŚLI CZAS POZWOLI

- B1 Czy lemat o uściskach dłoni jest prawdziwy również dla multigrafów bez pętli?
- B2 Czy twierdzenia z zadań A5 i A6 są prawdziwe również dla multigrafów?
- B3 Udowodnij, że każdy graf o stopniu minimalnym δ zawiera ścieżkę długości δ .
- B4 Graf G zdefiniowany jest poprzez macierz sąsiedztwa:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Podaj rząd, stopnie wierzchołków oraz rozmiar grafu G . Narysuj ten graf.

C. ZADANIA DO SAMODZIELNEJ PRACY

- C1 Podaj warunek konieczny na to, aby graf rzędu n był izomorficzny ze swoim dopełnieniem.
- C2 Znajdź wszystkie nieizomorficzne grafy rzędu 4. Pośród nich wskaż pary: graf i jego dopełnienie.
- C3 Czy istnieje graf 3-regularny rzędu 7?
- C4 Podaj przykład dwóch nieizomorficznych grafów G i H o takich samych stopniach wierzchołków, tj. spełniających: $V(G) = V(H) = \{v_1, \dots, v_n\}$ oraz $d_G(v_i) = d_H(v_i)$ dla każdego $i = 1, \dots, n$.