

TEORIA

Definicje: wykładnicza funkcja tworząca

Twierdzenia: szeregi potęgowe znanych funkcji

A. ZADANIA NA ĆWICZENIA

A1 Rozwiąż równania rekurencyjne metodą funkcji tworzących:

(a) $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + 4 \cdot (n+1) \cdot 3^{n+1}$, $n \geq 0$, $a_0 = 2$, $a_1 = 1$,

(b) $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n + 2\binom{n+7}{7}$, $n \geq 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$,

A2 Wiedząc, że liczba nieporządków zbioru n -elementowego spełnia zależność rekurencyjną:

$$D_n = nD_{n-1} + (-1)^n, \quad n \geq 1,$$

wyznacz wykładniczą funkcję tworzącą ciąg D_n .

B. ZADANIA NA ĆWICZENIA - JEŚLI CZAS POZWOLI

B1 Znajdź wykładnicze funkcje tworzące następujących ciągów:

(a) $1, 2, 3, 4, \dots$,

(b) $0, 1, 1, 2, 6, 24, 120, \dots$,

B2 Niech n będzie liczbą naturalną. Wyznacz wykładniczą funkcję tworzącą ciąg P_k , gdzie P_k oznacza liczbę k -elementowych wariacji bez powtórzeń zbioru n -elementowego.

B3 Udowodnij, że liczba nieporządków D_n jest równa liczbie naturalnej, która jest najbliższa wyrażeniu $n!/e$.

B4 Udowodnij, że „zwykła” (nie wykładnicza) funkcja tworząca dla liczby nieporządków jest rozbieżna wszędzie poza zerem.

C. ZADANIA DO SAMODZIELNEJ PRACY

C1 Udowodnij, że liczba nieporządków zbioru n -elementowego spełnia zależność rekurencyjną daną w zadaniu A2 z warunkiem początkowym $D_0 = 1$.