Teoria

Twierdzenia: algorytm stabilnych małżeństw

A. Zadania na ćwiczenia

A1 Wyznacz stabilny układ małżeństw dla poniższych zestawów preferencji.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

A2 Dana jest macierz zero-jedynkowa A wymiaru $n \times n$. Udowodnij, że jeżeli w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie znajduje się dokładnie k jedynek, gdzie $k \geq 1$, to nie da się pokryć wszystkich jedynek w macierzy A przy użyciu mniej niż n linii.

A3 Udowodnij, że iloczyn dwóch macierzy bistochastycznych jest macierzą bistochastyczną. Czy można coś powiedzieć o rozkładzie takiego iloczynu na macierze permutacyjne (na podstawie rozkładów czynników)?

A4 Czy w algorytmie stabilnych małżeństw oszustwo może się opłacać? Precyzując: dany jest zestaw preferencji; czy zmiana preferencji jednego z mężczyzn na fałszywy może doprowadzić go do uzyskania lepszej (w rzeczywistości) partnerki? Co jeżeli fałszerstwa dokonałaby (jedna) kobieta?

B. Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

B1 Dane są uniwersytety $u_1, \ldots, u_j$, które rekrutują kandydatów $k_1, \ldots, k_t$. Niech m_i oznacza liczbę dostępnych miejsc na uniwersytecie u_i. Załóżmy, że liczba kandydatów jest większa niż sumaryczna liczba miejsc na wszystkich uniwersytetach. Zaadaptuj algorytm stabilnych małżeństw tak, aby uzyskać stabilne listy przyjęć, tzn. takie, że nie ma kandydata k oraz uniwersytetu u, dla których:

- k nie został nigdzie przyjęty lub k wolałby studiować na u niż na uczelni, na którą został przyjęty, oraz
- u wolałby przyjąć k niż przynajmniej jednego przyjętego przez siebie kandydata.

C. Zadania do samodzielnej pracy

C1 Podaj, o ile istnieją, zestawy preferencji $n \times n$, dla których algorytm stabilnych małżeństw kończy się po:

- jednym kroku,
- n krokach.

C2 Wyznacz stabilny układ małżeństw dla poniższych zestawów preferencji.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$