Teoria

Definicje: łańcuch; antyłańcuch; pokrycie łańcuchowe
Twierdzenia: tw. Dilwortha

A. Zadania na ćwiczenia

A1 Niech $X = \{1, 2, 4, 5, 7, 14, 28, 70, 140\}$ i niech $x, y \in X$. Piszemy, że $x \leq y$, jeśli x dzieli y. Dla zbioru częściowo uporządkowanego $(X, \leq)$ narysuj diagram Hassego, znajdź minimalne pokrycie łańcuchowe oraz maksymalny antyłańcuch.

A2 Wyprowadzić tw. Kőniga z tw. Dilwortha.

B. Zadania na ćwiczenia - jeśli czas pozwoli

B1 Udowodnij, korzystając z twierdzenia Dilwortha, że spośród dowolnych 13 (różnych) liczb naturalnych da się wybrać albo ciąg siedmiu (różnych) liczb, z których każda kolejna jest wielokrotnością poprzedniej, lub trzy liczby, z których żadne dwie nie dzielą się przez siebie.

Przykład: ze zbioru $\{2, 3, 4, 6, 12\}$ *nie da się wybrać trzech liczb tak, aby żadne dwie nie dzieliły się przez siebie, istnieje za to ciąg* $(2, 4, 12)$ *w którym każda kolejna liczba jest wielokrotnością poprzedniej.*

B2 Niech $X = \{1, \ldots, n\}$. Rozważmy zbiór uporządkowany $(2^X, \subset)$. Udowodnij, że diagram Hassego tej relacji jest rysunkiem hiperkostki Q_n. Uzasadnij, że zbiór 2^X da się pokryć co najwyżej $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ łańcuchami.

B3 (tw. Erdősa–Szekeresa) Udowodnij, że dowolny ciąg długości $n^2 + 1$ zawiera podciąg monotoniczny długości $n + 1$.

C. Zadania do samodzielnej pracy

C1 Zilustruj tw. Dilwortha na przykładzie zbioru 2^X z relacją inkluzji, gdzie $X = \{a, b, c, d\}$.