

Lista 2 - Grupy. Ciało liczb zespolonych - postać algebraiczna liczby zespolonej.

1. Które z następujących struktur są grupami

(a) $(\mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{Z}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_3, +_3)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$;

(b) $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \cdot)$, $(\mathbb{Z}_4, \cdot_4)$;

(c) $(\{x \in \mathbb{R} : x = 2^n \cdot 3^m, n, m \in \mathbb{Z}\}, \cdot)$.

2. Niech $X \neq \emptyset$ i $2^X = \{Y : Y \subseteq X\}$.

(a) Czy $(2^X, \cap)$ jest grupą?

(b) Czy $(2^X, \cup)$ jest grupą?

3. Obliczyć (wynik zapisz w postaci algebraicznej)

(a) $(-2 + 4i)^2 (1 - i)$;

(b) $(3 - 2i)^3 + (1 - i)^4$;

(c) $\frac{5 + 4i}{2 - i}$;

(d) $\frac{2 - 7i}{(1 + 2i)^2}$;

(e) $\frac{5}{3 - i} + \frac{8 - i}{(2 - 3i)^2}$.

4. Dana jest liczba $z = x + iy$. Podać część rzeczywistą i urojoną liczb zespolonych

(a) $z + 2i$;

(c) $z(z - i)$;

(e) $z^2 \cdot i^{2020}$.

(b) $zi - \bar{z}$;

(d) $\frac{z + 1}{z - 1}$;

5. Zilustrować na płaszczyźnie zespolonej następujące zbiory

(a) $\{z \in \mathbb{C} : |z + i - 3| > 5\}$;

(d) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{|2 + i - z|}{|3 - 3i|} \leq \sqrt{3}\}$;

(b) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 2| = |z + 4i|\}$;

(e) $\{z \in \mathbb{C} : \frac{|z + 3|}{|z - 2i|} \geq 1\}$;

(c) $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z - i)^2 \leq 0\}$;

(f) $\{z \in \mathbb{C} : |-i + 1| \leq |2 - z + i| \leq 5\}$.

6. Wykazać, że w zbiorze liczb zespolonych zachodzą następujące równości

(a) $z\bar{z} = |z|^2$;

(b) $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$.

7. Narysować na płaszczyźnie zespolonej zbiór wszystkich liczb zespolonych z , dla których liczba

$w = \frac{zi}{z + 1}$ jest

(a) rzeczywista;

(b) urojona.