

Lista 5 - Wielomiany rzeczywiste i zespolone

1. Znajdąc niektóre pierwiastki podanych wielomianów zespolonych znaleźć ich pozostałe pierwiastki:

(a) $W(z) = z^4 + 2z^3 + 5z^2 + 6z + 6$, $z_1 = -1 + i$;

(b) $W(z) = z^6 - 2z^5 + 5z^4 - 6z^3 + 8z^2 - 4z + 4$, $z_1 = i, z_2 = -\sqrt{2}i$.

2. Podać przykłady wielomianów zespolonych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

(a) liczba 4 jest pierwiastkiem pojedynczym, liczba $2 - 3i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczba $2 + 3i$ pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu;

(b) liczba $-4i$ jest pierwiastkiem podwójnym, a liczby 3, -5 pierwiastkami potrójnymi tego wielomianu.

3. Podać przykłady wielomianów zespolonych o współczynnikach rzeczywistych najniższego stopnia, które spełniają podane warunki:

(a) liczby 1, -5 , $-\sqrt{2}$ oraz $1 - 3i$ są pierwiastkami pojedynczymi tego wielomianu;

(b) liczba $1 + i$ jest pierwiastkiem pojedynczym, liczby 3, $-i$ są pierwiastkami podwójnymi, a liczba $-4 + 3i$ pierwiastkiem potrójnym tego wielomianu.

4. Podane wielomiany zespolone o współczynnikach rzeczywistych przedstawić w postaci iloczynu nierozkładalnych czynników rzeczywistych:

(a) $W(z) = z^4 + 81$;

(b) $W(z) = 4z^5 - 4z^4 - 13z^3 + 13z^2 + 9z - 9$.

5. Liczby $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ to pierwiastki trzeciego stopnia z liczby zespolonej $z = 22 - 17i$. Wyznacz liczbę

$$w = (2 - z_1)^2 + (2 - z_2)^2 + (2 - z_3)^2.$$

6. Liczby $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ to pierwiastki wielomianu zespolonego $W(z) = -z^3 + 3z^2 + 1$. Znajdź wartość wyrażenia

$$w = (1 + iz_1)(1 + iz_2)(1 + iz_3).$$