

Lista 7 - Wyznaczniki

1. Obliczyć wyznaczniki:

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 5i \end{vmatrix};$$

$$(d) \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3+i \end{vmatrix};$$

$$(f) \begin{vmatrix} 8 & 8 & 7 & 4 \\ 9 & 7 & 9 & 5 \\ 7 & 5 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 9 & 8 \end{vmatrix};$$

$$(b) \begin{vmatrix} 2 & 6 & 2 \\ -3 & -1 & -5 \\ -1 & 5 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(e) \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 3 \end{vmatrix};$$

$$(g) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} 2 & 6 & 7 \\ 0 & -1 & -3+i \\ 0 & 0 & 2i \end{vmatrix};$$

2. Obliczyć wyznaczniki stopnia n

$$(a) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$(b) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & 4 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & 4 & \dots & n \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ \cdot & & & & & \\ -1 & -2 & -3 & -4 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

3. Nie licząc wyznaczników (korzystając z ich własności) sprawdzić czy zachodzi równość:

$$(a) \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & a_1x + b_1y + c_1 \\ a_2 & b_2 & a_2x + b_2y + c_2 \\ a_3 & b_3 & a_3x + b_3y + c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix};$$

$$(b) \begin{vmatrix} a_1 + b_1x & a_1 - b_1x & c_1 \\ a_2 + b_2x & a_2 - b_2x & c_2 \\ a_3 + b_3x & a_3 - b_3x & c_3 \end{vmatrix} = -2x \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Obliczyć:

$$(a) \det(2A \cdot B^T)^{-1}, \text{ gdy } \det A = 3, \det B = -1, A, B \text{ macierze } 4 \times 4;$$

$$(b) \det[(A^{-1} \cdot B)^T \cdot (2C)^{-1}], \text{ gdy } \det A = a, \det B = b, \det C = c, a \cdot b \cdot c \neq 0, A, B, C \in \mathbb{C}^{n \times n}.$$

5. Jak zmieni się wyznacznik macierzy stopnia n gdy jej wiersze zapiszemy w odwrotnej kolejności?

6. Niech $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sprawdzić, czy zachodzi równość $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$.

7. Niech $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Sprawdzić, czy zachodzi implikacja $A^T A = I \Rightarrow A A^T = I$.

8. Liczby 1798, 2139, 3255, 4867 dzielą się przez 31. Uzasadnić, że wyznacznik macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 9 & 8 \\ 2 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 5 \\ 4 & 8 & 6 & 7 \end{bmatrix} \text{ również dzieli się przez 31.}$$