

Lista 8 - Macierz odwrotna. Wartości i wektory własne macierzy.

1. Wykorzystując wszystkie poznane metody wyznaczyć macierze odwrotne danych macierzy

$$(a) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2. Rozwiązać podane równania macierzowe

$$(a) A \cdot X = 2X - I, \quad (b) X \cdot A = A^T + A, \quad (c) (X - A) \cdot A^T = -A,$$

$$\text{gdy } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

3. Wyznaczyć wartości i wektory własne macierzy:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
$$(b) \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix};$$

Rozważyć przypadek gdy $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ oraz przypadek gdy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$.

4. Wielomian charakterystyczny macierzy A ma postać:

$$\varphi_A(\lambda) = -\lambda^9 + \frac{2}{9}\lambda^8 + \lambda^5 + \frac{2}{9}\lambda^4 + \frac{2}{9}.$$

Wyznaczyć:

- (a) wymiar macierzy A ;
- (b) $\det A$.

5. Znając wartości własne macierzy A znaleźć wartości własne :

- (a) A^{-1} , jeśli macierz A jest nieosobliwa;
- (b) A^2 .