

Lista 9 - Rząd macierzy. Układy równań liniowych

1. Wyznaczyć rząd macierzy

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix};$

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix};$

(d) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix};$

(e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix};$

2. Przedyskutować rząd macierzy A w zależności od wartości parametrów $a, b, p \in \mathbb{R}$

(a) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 1 \end{bmatrix};$

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & p \\ 3 & 1 & 3 & p \\ 3 & 3 & 1 & p \end{bmatrix};$

(c) $\begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & b & 1 & 3 \\ 1 & 2b & 1 & 4 \end{bmatrix}.$

3. Dana jest macierz $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ a & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Dla jakiej wartości parametru a rząd A jest

- (a) minimalny;
- (b) maksymalny.

4. Dla jakich wartości parametru p podane układy równań są układami Cramera:

(a) $\begin{cases} 6p^2x - 3y = 3p \\ 2x - y = 7 \end{cases};$

(b) $\begin{cases} x + 3y + 3z = px \\ 3x + y + 3z = py \\ 3x + 3y + z = pz \end{cases} ?$

5. Korzystając ze wzoru Cramera znaleźć rozwiązania podanych układów równań

(a) $\begin{cases} 9x - 8y = 4 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases};$

(b) $\begin{cases} 4x + 5y - 6z = 3 \\ y - 2z = -1 \\ 2x + 3y - 3z = 2 \end{cases}.$

6. W podanych układach równań liniowych określić (nie rozwiązując ich) liczby rozwiązań oraz parametrów:

(a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 1 \\ 3x + y + z - t = 2 \\ 5x - y + 5z + t = 4 \end{cases};$

(b) $\begin{cases} 2x + 2y - z + t = 1 \\ x - y - z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - 4z - t = 0 \end{cases};$

$$(c) \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 2x + y - z = 1 \\ 5x - y - z = 2 \\ x - 10y + 4z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \end{cases} ; \quad (d) \begin{cases} y + z + 3t = 0 \\ 2x + y - z - 3t = 2 \\ x - 2y + z + 2t = -1 \\ 2x + 3y + z + 3t = 1 \end{cases} .$$

7. Określić liczbę rozwiązań układu równań liniowych w zależności od parametru p :

$$\begin{cases} px + y + z = 1 \\ x + y - z = p \\ x - y + pz = 1 \end{cases} .$$

8. Rozwiązać układy równań liniowych z zadania 6.

9. Stosując metodę eliminacji Gaussa rozwiązać podane układy równań liniowych:

$$(a) \begin{cases} 2x + y - z + t = 1 \\ y + 3z - 3t = 1 \\ x + y + z - t = 1 \end{cases} ; \quad (c) \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ 3x - y + 3z = 2 \\ x + y + z = 0 \\ x - y + z = 1 \end{cases} ;$$

$$(b) \begin{cases} x + 2y - z - t = 1 \\ x + y + z + 3t = 2 \\ 3x + 5y - z + t = 3 \end{cases} ; \quad (d) \begin{cases} x + 2y + 3z - 2t - u = 6 \\ 3x + 6y + 5z - 2t - 9u = 1 \\ 2x + 4y + 2z - 8u = -5 \\ 2x + 4y + 7z - 5t + u = 17 \\ x + 2y + 6z - 5t - 10u = 12 \end{cases} .$$