Wymagania teoretyczne: pojęcie wektora, podstawowe działania na wektorach (dodawanie, mnożenie przez skalar), długość wektora.

Metody ilościowe w fizyce medycznej

Maciej Kalka, Bartłomiej Spisak, Dariusz Woźniak

1 Zadania kontrolne

1. Proszę geometrycznie dodać następujące wektory, zaczepione w początku układu współrzędnych

   (a) $\boldsymbol{u} = (1, 2)$, $\boldsymbol{v} = (2, 1)$
   (b) $\boldsymbol{u} = (-1, -1)$, $\boldsymbol{v} = (2, 1)$
   (c) $\boldsymbol{u} = (3, 0)$, $\boldsymbol{v} = (1, 1)$
   (d) $\boldsymbol{u} = (-2, 1)$, $\boldsymbol{v} = (-1, 1/2)$

2. Wyznaczyć długość podanych wektorów

   (a) $\boldsymbol{u} = (1, 1)$ (b) $\boldsymbol{u} = (-2, -1, 0)$ (c) $\boldsymbol{u} = (3, 2, 1)$

3. Wektor $\boldsymbol{v}$ zaczepiony jest w punkcie A, znaleźć współrzędne końca tego wektora, jeżeli

   (a) $\boldsymbol{v} = (3, -2)$, $A = (1, 1/2)$
   (b) $\boldsymbol{v} = (1, 2, 0)$, $A = (5, -1, 0)$
   (c) $\boldsymbol{v} = (-2, 2, 2)$, $A = (1, -1, 2)$
   (d) $\boldsymbol{v} = (-1, 1, 2, 3)$, $A = (-2, 1, 6, 1)$

4. Dla podanych wektorów znaleźć wektory jednostkowe o tym samym kierunku i zwrocie

   (a) $\boldsymbol{u} = (2, 2)$ (b) $\boldsymbol{v} = (-4, 1, 0)$ (c) $\boldsymbol{w} = (-2, 1, -1)$

5. O wektorze $\boldsymbol{v}$ wiadomo, że ma długość r oraz jest skierowany w kierunku zgodnym z wektorem $\boldsymbol{e}$. Wyznaczyć wektor $\boldsymbol{v}$, jeżeli

   (a) $r = 2$, $\boldsymbol{e} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$
   (b) $r = 4$, $\boldsymbol{e} = (\sqrt{3}/2, 1/2)$
   (c) $r = \sqrt{2}$, $\boldsymbol{e} = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
   (d) $r = \sqrt{5}$, $\boldsymbol{e} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$

6. Proszę znaleźć wartości liczb α, β dla których zachodzi

$$(-10, -11) = \alpha(1, -1) + \beta(4, 3)$$

7. Proszę znaleźć wartości liczb α, β, γ dla których zachodzi

$$\alpha(1, 2, 1) + \beta(2, 1, -2) + \gamma(-1, -1, 1) = (0, 0, 1)$$

2 Zadania na ćwiczenia

1. Podane wektory zapisać przy pomocy składowych w bazie standardowej $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \cdots, \boldsymbol{e}_n\}$

   (a) $\boldsymbol{u} = (1, 2)$ (b) $\boldsymbol{v} = (6, -5, 0)$ (c) $\boldsymbol{w} = (1, 4, -5)$

2. Znaleźć kąt między podanymi wektorami

$$\boldsymbol{a} = 2\boldsymbol{e}_x + 3\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z, \quad \boldsymbol{b} = 13\boldsymbol{e}_x - 6\boldsymbol{e}_y + 8\boldsymbol{e}_z$$

   korzystając z

   (a) zapisu przy pomocy składowych

   (b) zapisu przy pomocy współrzędnych

   gdzie $\boldsymbol{e}_i$ jest wersorem wzdłuż osi $0-i$. Która metoda jest wygodniejsza?

3. Obliczyć kąt między wektorami

$$\boldsymbol{p} = 6\boldsymbol{m} + 4\boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{q} = 2\boldsymbol{m} + 10\boldsymbol{n}$$

   jeżeli wiadomo, że $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$ są wektorami jednostkowymi wzajemnie prostopadłymi

4. Obliczyć cosinus kąta między wektorami $\boldsymbol{u} = 4\boldsymbol{p} + \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{p} - 2\boldsymbol{q}$ wiedząc, że: $\boldsymbol{p} \circ \boldsymbol{q} = 2$ oraz $p = q = \sqrt{3}$.

5. Dla jakiej wartości parametru λ wektory $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{p} + \lambda\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{b} = -\boldsymbol{p} + 2\boldsymbol{q}$ są wzajemnie prostopadłe, jeżeli wiadomo, że $p = 5$, $q = 3$ oraz $\angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}) = (2\pi/3)$.

6. Dane są wektory $\boldsymbol{a} = (3, y, z)$, $\boldsymbol{b} = (1, 3, 2)$, $\boldsymbol{c} = (2, -4, -1)$. Wyznaczyć wartości y, z dla których wektor $\boldsymbol{a}$ jest prostopadły do pozostałych.

7. W prostokątnym, dwuwymiarowym układzie współrzędnych zaznaczyć wektory $\boldsymbol{a} = (1, 1)$ oraz $\boldsymbol{b} = (2, 0)$. Geometrycznie zaznaczyć rzut wektora $\boldsymbol{a}$ na kierunek wektora $\boldsymbol{b}$. Czy jesteś w stanie wyznaczyć jego składowe? *Wskazówka*: wykorzystać cosinus kąta utworzonego między wektorami. Jaką własność ma wektor $\boldsymbol{a} - \mathrm{proj}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}$? Zaznaczyć ten wektor.

8. Wyznaczyć rzut wektora $\boldsymbol{a}$ na kierunek wektora $\boldsymbol{b}$, jeżeli

   (a) $\boldsymbol{a} = (1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, -2)$

   (b) $\boldsymbol{a} = (-2, 3)$, $\boldsymbol{b} = (3, 2)$

   (c) $\boldsymbol{a} = (1, -1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (1, 4, -2)$

   (d) $\boldsymbol{a} = (1, 6, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, -\frac{1}{2}, 3)$

9. Znaleźć cosinusy kierunkowe wektorów

   (a) $\boldsymbol{a} = (1, -2)$ (b) $\boldsymbol{b} = (\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, 4)$ (c) $\boldsymbol{c} = (1, -1, 2, -2)$

10. Proszę wykazać, że

$$(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(\angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}))$$

    Jaką nazwę nosi powyższe twierdzenie?

11. Proszę sprawdzić, czy zachodzi

$$\text{proj}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a} + 4\boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}) = \text{proj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + 4\text{proj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b} - 2\text{proj}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{c}$$

    dla wektorów $\boldsymbol{a} = (1, 0, -1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{c} = (0, 1, -2)$ oraz $\boldsymbol{u} = (1, 1, 1)$.

12. Wykazać prawdziwość wzoru

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 = 2(a^2 + b^2)$$

13. Zapisać warunek jaki muszą spełniać współrzędne wektora (x, y, z), aby ten był prostopadły do wektorów $\boldsymbol{a} = (1, 1, 0)$, $\boldsymbol{b} = (-1, 0, 1)$. Ile jest takich wektorów?

14. Niech $\boldsymbol{a} = (1, 5, -2)$, $\boldsymbol{b} = (-2, 3, 3)$. Znaleźć wektor prostopadły do podanych wektorów.

15. Dane są wektory $\boldsymbol{a} = (3, -1, -2)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, -1)$. Proszę znaleźć współrzędne wektora $(2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{b}$.

16. Proszę uprościć wyrażenia

    (a) $\boldsymbol{e}_x \times (2\boldsymbol{e}_y - \boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_x) + (2\boldsymbol{e}_z + \boldsymbol{e}_y) \times (\boldsymbol{e}_x - 2\boldsymbol{e}_z)$

    (b) $(3\boldsymbol{e}_x - \boldsymbol{e}_z) \times (2\boldsymbol{e}_x + \boldsymbol{e}_y - 3\boldsymbol{e}_z)$

    gdzie wektory $\boldsymbol{e}_i$, $i = x, y, z$ są wektorami jednostkowymi, wzajemnie prostopadłymi, o orientacji zgodnej z orientacją przestrzeni.

17. Sprawdzić tożsamość

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = a^2b^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2$$

18. Udowodnić poniższą równość

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 0$$

19. Proszę udowodnić poniższe tożsamości

    (a) $\boldsymbol{a} \cdot [(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) \times (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})] = -\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$
    (b) $(\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) \cdot [(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})] = 3\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$

20. Wykazać, że $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} + \boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}$.

21. Obliczyć wartość wyrażenia $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ dla wektorów $\boldsymbol{a} = (1,2,1)$, $\boldsymbol{b} = (-1,1,2)$, $\boldsymbol{c} = (0,0,3)$. Porównać to z wartością wyrażenia $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$.

22. Wektor $\boldsymbol{x}$ spełnia równania: $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{a} = \gamma$ i $\boldsymbol{x} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, gdzie $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ są stałymi wektorami, a γ jest stałą rzeczywistą. Proszę rozwiązać ten układ ze względu na $\boldsymbol{x}$. Wykorzystać tożsamość $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$

23. Momentem wektora $\boldsymbol{F}$ przyłożonego w punkcie B, względem punktu A nazywamy wielkość
$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F},$$
gdzie $\boldsymbol{r} = \underline{AB}$.
Proszę obliczyć momenty wektora $\boldsymbol{F}$, jeżeli

    (a) wektor $(2,5,-4)$ przyłożono w punkcie $(3,-1,5)$, a moment liczony jest względem punktu $(1,-2,3)$
    (b) wektor $(1,1,0)$ przyłożono w punkcie $(1,1,0)$, a moment liczony jest względem punktu $(0,0,0)$

24. Proszę sprawdzić, czy iloczyn wektorowy wektorów $\boldsymbol{a} = (r\sin\omega t, 0, r\cos\omega t)$, $\boldsymbol{b} = (-r\cos\omega t, 0, r\sin\omega t)$ zmienia się w czasie

25. Proszę wektor $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ zapisać w postaci
$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c}$$
zakładając, że wektory $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ nie są współpłaszczyznowe (koplanarne).

26. Proszę obliczyć iloczyn mieszany $\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ dla wektorów
$$\boldsymbol{a} = (1,2,1), \boldsymbol{b} = (-1,0,2), \boldsymbol{c} = (2,2,3)$$

27. Proszę obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego przez wektory
$$\boldsymbol{a} = (1,0,0),\ \boldsymbol{b} = (0,1,0),\ \boldsymbol{c} = (0,0,1).$$

28. Proszę obliczyć wysokość równoległościanu wyznaczonego przez wektory
$$\boldsymbol{a} = (3,1,2),\ \boldsymbol{b} = (-1,-1,0),\ \boldsymbol{c} = (2,1,1)$$

29. Podstawa równoległościanu jest rozpięta na wektorach $\boldsymbol{a} = (2, 2, 1), \boldsymbol{b} = (4, -2, 0)$. Obliczyć objętość tej bryły wiedząc, że jej wysokość wynosi $h = 2$.

30. Proszę wykazać, że $|\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})|$ jest objętością równoległościanu ($V = P_p h$) rozpiętego na wektorach $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, gdzie wysokość poprowadzona jest z końca wektora $\boldsymbol{a}$.
Wskazówka: wykonać rysunek, zastanowić się jak wyznaczyć długość wysokości powstałej bryły, korzystając z iloczynu wektorowego i skalarnego.

31. Obliczyć objętość czworościanu ($V = 1/3 P_p h$) rozpiętego na wektorach
$$\boldsymbol{a} = (3, 2, -4),\ \boldsymbol{b} = (1, 5, 1),\ \boldsymbol{c} = (-1, 6, 7)$$

32. Proszę obliczyć pochodną podanych wektorów
   (a) $\boldsymbol{r}(t) = t^2 \boldsymbol{e}_x - 4\sin(2t)\boldsymbol{e}_y + e^t \boldsymbol{e}_x + 12t^3 \boldsymbol{e}_z$
   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (1, 2t, 3t^5)$
   (c) $\boldsymbol{r}(t) = t^4 \boldsymbol{e}_y - 4\cos(4t)\boldsymbol{e}_x + 0\boldsymbol{e}_z$
   (d) $\boldsymbol{r}(t) = (\sin(2t), \cos(2t), e^{-t})$

33. Położenie ciała dane jest wektorem $\boldsymbol{r}(t)$
   (a) $\boldsymbol{r}(t) = (t^2, 2t, -2)$
   (b) $\boldsymbol{r}(t) = (\cos t, \sin t, 0)$

   Obliczyć prędkość i przyspieszenie tego ciała.

34. Proszę wykazać, korzystając z dowolnej reprezentacji wektora, że
   (a) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}} \circ \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \circ \dot{\boldsymbol{b}}$
   (b) $\frac{d}{dt}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \dot{\boldsymbol{b}}$

35. Korzystając z własności pochodnej wektora rozpisać wyrażenia
   (a) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})]$
   (b) $\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a} \times ((\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) \times \boldsymbol{a})]$
   (c) $\frac{d}{dt}[(\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}]$

36. Proszę pokazać, że w przypadku gdy wektory $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{c}$ są wektorami stałymi, to zachodzi
$$\frac{d}{dt}[\boldsymbol{a} \circ (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})] = \boldsymbol{a} \circ (\dot{\boldsymbol{b}} \times \boldsymbol{c})$$

37. Wykazać, że gdy wektor $\boldsymbol{a}$ ma stały kierunek, a $d/dt(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = 0$, to $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})^2 = \alpha \boldsymbol{a}^2$, gdzie $\alpha = const$.

38. Cząstka o masie m i ładunku q porusza się w polu magnetycznym o indukcji magnetycznej $\boldsymbol{B}$ pod wpływem siły Lorentza: $\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Proszę pokazać, że szybkość cząstki v jest stała.

39. Cząstka o masie m porusza się z prędkością $\boldsymbol{v}$ w polu siły $\boldsymbol{F} = -f(r)\boldsymbol{r}$. Proszę pokazać, że orbitalny moment pędu $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v})$ jest stały.

40. Proszę zortonormalizować podane wektory

$$\boldsymbol{a} = (1, 2), \quad \boldsymbol{b} = (1, -2)$$

metodą Grama-Schmidta w przestrzeni $\mathbb{R}^2$.

41. Proszę zortonormalizować podane wektory

$$\boldsymbol{a} = (1, -2, 0), \quad \boldsymbol{b} = (5, 5, 1), \quad \boldsymbol{c} = (5, 4, 4)$$

metodą Grama-Schmidta w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

42. Proszę zortonormalizować podane wektory

$$\boldsymbol{a} = (1, 1, 0, 0), \quad \boldsymbol{b} = (1, 0, 1, 0), \quad \boldsymbol{c} = (1, 1, 1, 0), \quad \boldsymbol{d} = (0, 0, 1, 1)$$

metodą Grama-Schmidta w przestrzeni $\mathbb{R}^4$.

43. Początek układu współrzędnych $(0, 0)$ przesunięto o wektor $(1, 2)$. Proszę podać współrzędne punktu $(-1, -2)$ w nowym układzie współrzędnych.

44. Początek układu współrzędnych $(-4, 3)$ przesunięto do punktu $(0, 0)$. Proszę podać współrzędne punktu $(1, 1)$ w nowym układzie współrzędnych.

45. Układ współrzędnych obrócono o kąt $\pi/2$. Proszę znaleźć współrzędne punktu $(4, -4)$ w nowym układzie współrzędnych.

46. Układ współrzędnych obrócono o kąt $\pi/3$. Proszę znaleźć współrzędne punktu $(-2, 3)$ w starym układzie współrzędnych.

47. Początek dwuwymiarowego układu kartezjańskiego przeniesiono do punktu $(2, -1)$, a następnie obrócono ten układ wokół jego początku o kąt $\pi/3$. Proszę wyznaczyć współrzędne punktu P w starym układzie współrzędnych, jeżeli jego współrzędne w nowym układzie współrzędnych wynoszą $(1, 1)$.