

Zestaw 3

1. Niech $\Omega = \mathbb{R}$. Wyznaczyć σ -ciało generowane przez przedziały $\langle 0, 5 \rangle$ oraz $\langle 1, 3 \rangle$.
 2. Niech $\Omega = \langle 0, 1 \rangle$. Wyznaczyć σ -ciało generowane przez przedział $(0, 1/2)$.
 3. Pokazać, że rodzina $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ składająca się ze zbiorów przeliczalnych oraz zbiorów o przeliczalnych dopełnieniach jest σ -ciałem.
Pokazać, że jeśli Ω jest nieprzeliczalna, to istnieje $A \subset \Omega$, taki że $A \notin \mathcal{F}$.
 4. Niech $\mathcal{T}$ będzie dowolnym zbiorem indeksów, niech $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ - rodzina σ -ciał. Pokazać, że $\bigcap_{t \in \mathcal{T}} \mathcal{F}_t$ jest σ -ciałem.
 5. Dany jest ciąg σ -ciał na Ω taki, że $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$. Sprawdzić, czy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{F}_n$ jest σ -ciałem na Ω .
 6. Pokazać, że σ -ciało nieskończone jest nieprzeliczalne.
 7. Niech $(\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F})$ będzie przestrzenią mierzalną, gdzie $\mathcal{F}$ jest σ -ciałem generowane przez $\{\langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle\}$. Które z poniższych funkcji są funkcjami mierzalnymi?
 - (a) $f(x) = x, \quad f : (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F}),$
 - (b) $g(x) = x, \quad g : (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{B}),$
 - (c) $h(x) = 1, \quad f : (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F}),$
 - (d) $z(x) = 1, \quad z : (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{F}) \longrightarrow (\Omega = \langle 1, 4 \rangle, \mathcal{B}).$
- UWAGA: Przez $\mathcal{B}$ oznaczamy tu i w kolejnych zadaniach σ -ciało zbiorów borelowskich.*
8. Niech $\Omega = \langle -1, 2 \rangle$ oraz $f(x) = 2 \operatorname{sgn}(x)$. Wyznaczyć najmniejsze σ -ciało, dla którego f jest funkcją mierzalną.
 9. Rozważamy zbiór liczb rzeczywistych z σ -ciałem zbiorów borelowskich oraz różnowartościowy ciąg $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Czy dla dowolnego ciągu liczbowego $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ funkcja $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \delta_{x_n}$ jest miarą, a miarą σ -skończoną? Czy istnieje ciąg liczbowy $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, dla którego μ jest miarą σ -skończoną, a miarą probabilistyczną?
 10. Niech Ω - zbiór nieprzeliczalny, $\mathcal{F}$ - σ -ciało składające się ze zbiorów przeliczalnych oraz zbiorów o przeliczalnych dopełnieniach. Niech $\mu : \mathcal{F} \longrightarrow \langle 0, \infty \rangle$ jest określona następująco: $\mu(A) = 0$, gdy A jest przeliczalny, $\mu(A) = 1$, gdy A ma przeliczalne dopełnienie. Czy μ jest miarą probabilistyczną?
 11. Niech $A \cup B \cup C = \Omega$, $P(B) = 2P(A)$, $P(C) = 3P(A)$, $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C)$. Pokazać, że $\frac{1}{6} \leq P(A) \leq \frac{1}{4}$. Pokazać, że oba ograniczenia mogą być osiągnięte.
 12. $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, $P(A \setminus B) = P(B \setminus A)$. Obliczyć $P(A)$ oraz $P(A \setminus B)$.
 13. Niech A, B, C będą zdarzeniami losowymi takimi, że $P(A|B \cap C) = 0,3$, $P(B|A \cap C) = 0,9$ oraz $P(C|B \cap A) = 0,6$. Obliczyć prawdopodobieństwo warunkowe: $P((A \cap B \cap C)|(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (C \cap B))$.