

Zestaw 4

1. W przypadkowych momentach odcinka $[0, A]$ mogą nadejść do odbiornika dwa sygnały. Odbiornik zostaje popsuty jeżeli różnica w czasie pomiędzy sygnałami jest mniejsza niż a ($a < A$). Obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia odbiornika w ciągu czasu A .
2. Z przedziału $[0, 1]$ wybieramy w sposób losowy dwa punkty b oraz c . Jakie jest prawdopodobieństwo, że równanie $x^2 + bx + c = 0$ nie ma pierwiastków rzeczywistych?
3. Odcinek o długości 10 cm podzielono w sposób losowy na trzy części. Obliczyć prawdopodobieństwo, że z tych części można zbudować trójkąt.
4. Między dwoma miastami równolegle prowadzą dwie linie telefoniczne. Odległość między nimi wynosi 70 km, a linie są oddalone od siebie o 6 km. W czasie burzy dwie linie były uszkodzone (po jednym uszkodzeniu na każdej linii). Jakie jest prawdopodobieństwo, że odległość pomiędzy tymi uszkodzeniami nie przekracza 10 km?
5. Na okręgu losowo wybrano kolejno punkty P_1, P_2, P_3 i P_4 . Obliczyć prawdopodobieństwo, że cięciwa P_1P_2 przetnie cięciwę P_3P_4 wewnątrz okręgu.
6. W kuli o promieniu $R = 10$ jest rozmieszczonych w sposób losowy i niezależnie jeden od drugiego 8 punktów. Wyznaczyć prawdopodobieństwo, że odległość od środka kuli do najbliższego punktu jest nie mniejsza od 1.
7. Niech $\Omega = (0, 1)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{(0,1)}$, P - miara Lebesgue'a. $\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n(\omega)}{2^n}$, gdzie $d_n(\omega)$ przyjmuje wartość 1 albo 0.
Niech $A_n = \{\omega : d_n(\omega) = 1\}$, $n = 1, 2, \dots$. Czy $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ są niezależne?
8. Rozważamy losowe rozmieszczenie k **nierozróżnialnych** kul ($k > 5$) w s rozróżnialnych szufladach zakładając, że **wszystkie rozmieszczenia są jednakowo prawdopodobne** (model Bosego-Einsteina). Obliczyć prawdopodobieństwo $P_{k,s}$, że ustalona szuflada zawiera dokładnie 5 kul. Udowodnić, że gdy k i s rosną do nieskończoności tak, że $k/s \rightarrow \lambda$, $\lambda \in (0, \infty)$, to $P_{k,s}$ dąży do $\lambda^5/(1 + \lambda)^6$.
9. Sprawdzić czy prawdziwa jest nierówność: $P(\liminf A_n) \leq \liminf P(A_n)$.
10. Niech A_n będzie kwadratem $\{(x, y) : |x| < 1, |y| < 1\}$ obróconym o kąt $2\pi n\theta$ wokół punktu $(0, 0)$. Wyznaczyć $\liminf A_n$, $\limsup A_n$, gdy $\theta \in \mathbb{Q}$. Dla jakich θ istnieje $\lim$?
11. Zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ są niezależne i mają równe prawdopodobieństwa. Jakie jest prawdopodobieństwo, że zajdzie skończenie wiele zdarzeń spośród nich.
12. W nieskończonym ciągu prób Bernoulliego z prawdopodobieństwem sukcesu w pojedynczej próbie równym $p \in (0, 1)$ zdarzenia A_n polega na pojawieniu się serii n sukcesów w próbach o numerach zawartych pomiędzy 2^n a $2^{n+1} - 1$. Zbadać, w zależności od p , szansę pojawienia się nieskończenie wielu zdarzeń A_n .