

WMS rok II, Wstęp do Rachunku Prawdopodobieństwa

Zestaw 5

1. Niech λ oznacza miarę lebesgue'a. Sprawdź, czy poniższe całki są zbieżne.

(a) $\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{1+x^2} d\lambda(x),$

(b) $\int_{\mathbb{R}} x e^{-|x|} d\lambda(x).$

2. Niech $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_k$, gdzie δ_k oznacza miarę diraca. Sprawdź, czy poniższa całka jest zbieżna.

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x \cdot 2^x}{x!} d\mu(x).$$

3. Niech ν, μ, m będą miarami σ -skończonymi na $(\Omega, \mathcal{F})$. Wykazać, że:

W1 $(\nu \ll \mu \quad \wedge \quad \mu \ll m) \Rightarrow (\nu \ll m \quad \wedge \quad \frac{d\nu}{dm} = \frac{d\nu}{d\mu} \cdot \frac{d\mu}{dm}),$

W2 $\frac{d\mu}{d\mu} = 1$ ($\mu - p.w.$),

W3 $\nu \equiv \mu \Rightarrow \frac{d\nu}{d\mu} = \left(\frac{d\mu}{d\nu}\right)^{-1}.$

4. Dane są dwa dwumianowe rozkłady prawdopodobieństwa: $P_1 \sim B(n, p)$ oraz $P_2 \sim B(k, q)$, gdzie $n, k \in \mathbb{N}$, $n > k$, $0 < q \leq p < 1$. Zbadać czy $P_1 \ll P_2$ oraz czy $P_2 \ll P_1$.

5. Rozkłady prawdopodobieństwa P_1, P_2 na $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ są zadane całkami:

$$P_i(A) = \int_A p_i(x) dx \quad \text{dla } A \in \mathfrak{B},$$

gdzie $p_1(x) = \beta \exp(-\beta(x-b)) \cdot \mathbf{1}_{[b, \infty)}(x)$ ($b > 0$) oraz $p_2(x) = \beta \exp(-\beta x) \cdot \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$. Zbadać czy $P_1 \ll P_2$ lub $P_2 \ll P_1$.

6. Dane są przestrzeń mierzalna $([0, 1]^2, \mathcal{B}_{[0, 1]^2})$, λ_2 miara Lebesgue'a oraz miara $\nu(A) = \lambda(\text{proj}_y(A \cap I))$, gdzie $A \in \mathcal{B}_{[0, 1]^2}$, $I = \{(x, y) : y \in [0, 1]\}$ dla ustalonego x_0 .

a) Jaka jest zależność między miarami λ_2, ν na $\mathcal{B}_{[0, 1]^2}$.

b) Jaka jest zależność między miarami λ_2, ν na $\mathcal{B}_x = \{[0, 1] \times C : C \in \mathcal{B}_{[0, 1]}\}$.

7. Wyznaczyć a tak, by funkcja

$$f(x) = \begin{cases} a \cos x + a & \text{dla } x \in (0, \pi) \\ 0 & \text{dla } x \notin (0, \pi) \end{cases}$$

była gęstością rozkładu prawdopodobieństwa względem miary Lebesgue'a.

Wyznaczyć dystrybuantę tego rozkładu.

8. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu jednostajnego na odcinku (a, b) . (Rozkład jednostajny jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a, a jego gęstość przyjmuje stałą wartość dodatnią na odcinku (a, b) oraz zero poza tym przedziałem.)

9. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$. (Rozkład wykładniczy jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a i jest zadany przez gęstość $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbf{1}_{\{x > 0\}}(x)$.)