

Zestaw 6

1. Podać przykład dwóch różnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie.
2. Dobrać stałą c tak, aby funkcja

$$f(x) = \begin{cases} c \cos x & \text{dla } |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{dla } |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

była gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X . Wyznaczyć jej dystrybuantę. Obliczyć $P(|X| < \frac{1}{2})$.

3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na odcinku $(-1, 3)$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Y = |X|$.
4. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem λ . Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Y = \ln X$.
5. Na przestrzeni probabilistycznej $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P)$, gdzie P ma ciągłą i rosnącą dystrybuantę F . Określono zmienną losową Y : $Y(x) = F(x)$. Znaleźć rozkład (gęstość i dystrybuantę) zmiennej losowej Y .
6. Promień koła jest zmienną losową R o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(r) = \begin{cases} e^{-r}, & r \geq 0 \\ 0, & r < 0 \end{cases}$$

Znaleźć gęstość prawdopodobieństwa g zmiennej losowej S określającej pole koła o promieniu R .

7. Łączny rozkład wektora losowego (X, Y) dany jest gęstością:

$$f(x, y) = e^{x-y} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{A}}(x, y), \quad \text{gdzie } \mathbf{A} = \{0 \leq x < 1 \wedge y \geq x\}$$

Obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia $\{X + Y < 2\}$.

8. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} \cdot \mathbf{1}_{\{(x, y): y > 0, |x| < y\}}(x, y).$$

Obliczyć $P(X > 0 \wedge Y > 1)$.

9. Rozmiar powodzi charakteryzuje się za pomocą dwóch zmiennych: czasu powodzi X (mierzonego w dniach) i całkowitych opadów atmosferycznych Y (w cm na m^2). Łączny rozkład (X, Y) dany jest przez gęstość:

$$f_X(x) = \begin{cases} c(x-2)^2 & \text{dla } 2 < x \leq 7, \frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 2, \\ c(12-x)^2 & \text{dla } 7 < x \leq 12, \frac{1}{2}x - 1 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 2. \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

Wyznaczyć c . Obliczyć prawdopodobieństwo, iż średnia ilość opadów na dobę jest większa od 6 cm na m^2 .

10. Niech $X \sim N(0, 1)$. Niech $Y = X \cdot \mathbf{1}_{\{|X| < 1\}} - X \cdot \mathbf{1}_{\{|X| \geq 1\}}$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej Y . Rozstrzygnąć, czy suma $X + Y$ ma rozkład normalny.