

Zestaw 7

1. Wydajność pracy robotników ma rozkład normalny o parametrach $N(7, 9)$ (wydajność w szt./godz.). Obliczyć prawdopodobieństwo, że robotnik wyprodukuje w ciągu godziny
 - a) od 5 do 8 sztuk,
 - b) poniżej 6 sztuk.
2. Ładunki prochu myśliwskiego waży się na wagach, których średni błąd kwadratowy pomiaru jest równy 150 mg. Nominalna masa ładunku jest rzędu 2.3 g. Zakładając, że błąd pomiaru ma rozkład normalny $N(0, 225 \cdot 10^{-4})$, obliczyć prawdopodobieństwo uszkodzenia strzelby, jeżeli maksymalna dopuszczalna waga ładunku wynosi 2.5 g. Wyznaczyć ε tak, aby masa 99% ładunków mieściła się w przedziale $(2.3 - \varepsilon, 2.3 + \varepsilon)$.
3. Zmienne losowe X i Y są niezależne. X ma rozkład normalny $N(0, 1/2)$. Natomiast Y ma rozkład wykładniczy $Exp(1)$. Obliczyć $P(Y > X^2)$.
4. Niech X, Y, Z niezależne zmienne losowe o jednakowym rozkładzie wykładniczym, niech $S = X + Y + Z$. Obliczyć $P(X > S/2 \vee Y > S/2 \vee Z > S/2)$.
5. X i Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach jednostajnych na odcinku $(0, 1)$. Wyznaczyć gęstość rozkładu zmiennej losowej $Z = -\log(XY)$.
6. Niech $U = \min(X, Y)$, $V = \max(X, Y)$. X, Y są niezależne o tym samym rozkładzie wykładniczym z parametrem λ . Sprawdzić czy,
 - a) zmienne losowe U, V są niezależne,
 - b) zmienne losowe $U, V - U$ są niezależne.
7. Niech X, Y niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(c - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2})$ ($c \in \mathbb{R}$). Wykazać, że rozkład różnicy $Z = X - Y$ nie zależy od c . Wyznaczyć gęstość zmiennej losowej Z .
8. ϑ, ϕ oznaczają szerokość i długość geograficzną na sferze jednostkowej w $\mathbb{R}^3$. Na sferze określono prawdopodobieństwo proporcjonalne do pola zbioru. Znaleźć gęstość zmiennych losowych ϑ, ϕ i wykazać ich niezależność.
9. Niech $U_1, U_2, \dots, U_n$ i.i.d. (tzn. są niezależne i mają ten sam rozkład) takie, że $U_1 \sim U(0, 1)$. Rozważamy zmienne losowe $X = \min(U_1, U_2, \dots, U_n)$ oraz $Y = \max(U_1, U_2, \dots, U_n)$. Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu wektora losowego (X, Y) .
10. W pewnej grupie ćwiczeniowej z Rachunku Prawdopodobieństwa jest 4 studentów i 6 studentek z drugiego stopnia studiów oraz 6 studentów i 1 studentka pierwszego stopnia studiów. Ile studentek pierwszego stopnia studiów musi dojść do tej grupy, aby przy losowaniu z niej jednej osoby płeć i rok studiów wylosowanej osoby były zmiennymi niezależnymi.
11. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład geometryczny o parametrze $p \in (0, 1)$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $Z = \max(X, Y)$.
12. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładach Poissona odpowiednio z parametrami a, b . Wykazać, że $X + Y$ ma rozkład Poissona z parametrem $a + b$.