

Zestaw 8

1. Łączny rozkład wektora losowego (X, Y) dany jest gęstością:

$$f(x, y) = e^{x-y} \cdot \mathbf{1}_{\mathbf{A}}(x, y), \quad \text{gdzie } \mathbf{A} = \{0 \leq x < 1 \wedge y \geq x\}$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe zmiennych losowych X i Y oraz zbadać ich niezależność.

2. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} \cdot \mathbf{1}_{\{(x, y): y > 0, |x| < y\}}(x, y).$$

Wyznaczyć gęstości brzegowe zmiennych losowych X i Y oraz zbadać ich niezależność.

3. Sprawdzić, czy zmienna losowa X o rozkładzie $P(X = (-1)^k k^{-1} 2^k) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$, ma wartość oczekiwaną.
4. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu dwumianowego.
5. Wyznaczyć wariancję rozkładu Poissona.
6. Bolek i Lolek grają w kości. Wygrywa ten z nich, który przy rzucie dwoma kostkami wyrzuci większą sumę oczek. Zmienna losowa X przyjmuje wartość -1 jeśli Bolek przegra, 1 jeżeli Bolek wygra oraz 0 w przypadku remis. Zmienna losowa Y jest równa sumie oczek na wszystkich czterech kostkach liczonej modulo 6. Oblicz wartości oczekiwane zmiennych losowych X , Y oraz zbadać ich niezależność.
7. Wykonujemy rzuty monetą aż do otrzymania po raz pierwszy sekwencji dwóch jednakowych wyników (tj. OO, RR) w dwóch kolejnych rzutach. Oblicz wartość oczekiwaną wykonanych rzutów. (Akt. 12.01.2002 zad 6)
8. Niech $\Omega = [0, 1]^2$ z σ -ciałem zbiorów borelowskich i jednostajnym rozkładem prawdopodobieństwa. Zmienna losowa $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ jest zdefiniowana jako odległość punktu ω od brzegu Ω . Znaleźć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X .
9. Niezależne zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ mają ten sam rozkład geometryczny o funkcji prawdopodobieństwa $P(X_i = k) = (1 - p)^k \cdot p$, $k \in \mathbb{N}_0$, $p \in (0, 1)$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej $Y_n = X_1 + \dots + X_n$.
10. Sprawdzić, czy zmienna losowa X o rozkładzie Cauchy'ego (tj. zadany przez gęstość $f(x) = (1/\pi) \cdot (1/(1 + x^2))$), ma wartość oczekiwaną.
11. Wyznaczyć wariancję rozkładu wykładniczego z parametrem $\lambda > 0$.
12. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = \sin X$.