

Zestaw 9

1. Na okręgu o promieniu 1 wybieramy losowo i niezależnie dwa punkty. Obliczyć wartość oczekiwaną odległości między nimi (wzdłuż cięciwy).
2. Zmienna losowa X ma rozkład wykładniczy o wartości oczekiwanej $1/\lambda$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $N = [X]$, gdzie $[a]$ oznacza część całkowitą z liczby a .
3. Aleksander chce sprzedać samochód. Postanowił, że sprzeda samochód pierwszej osobie, która zaoferuje cenę przynajmniej 10000 PLN. Zakładając, że kolejne oferty są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z wartością oczekiwaną 5000 PLN wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby ofert poprzedzających ofertę sprzedaży.
4. Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej X , który rozkład jest zadany przez dystrybuantę:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{1}{4}x & , x \in [0, 1) \\ 1 - e^{-x} & , x \geq 1 \end{cases}$$

5. Niech $U_1, \dots, U_n$ niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$. Wyznaczyć współczynnik kowariancji zmiennych losowych X oraz Y , gdzie $X = \min\{U_1, \dots, U_n\}$ oraz $Y = \max\{U_1, \dots, U_n\}$.
6. Niech K będzie zmienną losową taką, że $P(K = k) = 1/10$ dla $k = 1, \dots, 10$ i niech $X_k = \mathbf{1}_{\{K=k\}}$. Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych X_1 i $S_6 = X_1 + \dots + X_6$.
7. Pokazać, że współczynnik korelacji nie zależy od wyboru jednostek, tzn. dla dowolnych stałych $a > 0, b, c > 0, d$ oraz zmiennych losowych X, Y mamy: $\rho(X, Y) = \rho(aX + b, cY + d)$.
8. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} \cdot \mathbf{1}_{\{(x, y): y > 0, |x| < y\}}(x, y).$$

Obliczyć współczynnik korelacji zmiennych X i Y .

9. Zmienna losowa X ma rozkład normalny $N(m, \sigma)$. Wyznaczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $Y = (X - a)^2$.
10. Stosując nierówność Czebyszewa oszacowano, że prawdopodobieństwo tego, że liczba orłów k w serii rzutów symetryczną monetą będzie się różnić od swojej wartości oczekiwanej o co najmniej 25% tej wartości oczekiwanej, nie jest większe niż $1/160$. Z ilu co najmniej rzutów składa się ta seria?
11. Korzystając z nierówności Czebyszewa oszacować prawdopodobieństwo $P(|\frac{1}{n}X_n - \frac{1}{3}| \geq 0,01)$, gdzie X_n oznacza liczbę wystąpień zdarzenia A w n niezależnych doświadczeniach, w których $P(A) = \frac{1}{3}$.