

Zestaw 1

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = ce^{-x^2 - \frac{1}{2}y^2 + xy}.$$

Wyznaczyć c . Obliczyć wariancję zmiennej losowej $Z = 4Y - X$.

2. Niech (X, Y) ma dwuwymiarowy rozkład normalny. Sprawdzić, czy prawdą jest:

$$X, Y \text{ są niezależne} \iff X, Y \text{ są nieskorelowane}.$$

3. Niech $(X_1, X_2, X_3)' \sim N_3(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1,5 & 1 \\ 1,5 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć gęstość łączną oraz współczynnik korelacji ρ_{X_1, X_2} .

4. Wektor losowy (X_1, X_2, X_3) ma gęstość proporcjonalną do $\exp[-2(9x_1^2 + 5x_2^2 + 5x_3^2 + 6x_1x_2 + 12x_1x_3 + 4x_2x_3)]$. Wyznaczyć współczynnik kowariancji zmiennych losowych $Y_1 = X_1 + X_2 + X_3$ oraz $Y_2 = X_1 - X_2 + X_3$.
5. Wektor losowy (X_1, X_2, X_3) ma gęstość proporcjonalną do $\exp[-2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3)]$. Wyznaczyć rozkład zmiennej losowej $X_1 + X_2$.
6. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $([0, 1], \mathcal{B}, P)$, gdzie P jest miarą Lebesgue'a. Niech $\mathcal{G}$ będzie σ -ciałem generowanym przez zbiory $[0, \frac{2}{3}]$ oraz $(\frac{1}{2}, 1]$. Wyznaczyć $P([0, \frac{3}{4}] | \mathcal{G})$.
7. Rzucamy symetryczną kostką oraz prawidłową monetą. Zmienna losowa X przyjmuje wartość równą wyrzuconej liczbie oczek. Zmienna losowa Y przyjmuje wartość 2, gdy na monecie wypadnie orzeł oraz 1, gdy wypadnie reszka. Wyznaczyć prawdopodobieństwo warunkowe $P(A | \mathcal{G})$, gdzie A oznacza zdarzenie, że X/Y jest liczbą całkowitą, a $\mathcal{G}$ oznacza σ -ciało generowane przez zmienną losową
- X ,
 - Y .
8. W urnie znajduje się 21 kul ponumerowanych od 1 do 21. Losujemy jedną kulę. Zmienna X przyjmuje wartość 1, gdy wyciągniemy kulę z numerem parzystym oraz 0 w p.p. Zmienna Y przyjmuje 1, gdy wyciągniemy kulę z numerem podzielny przez 3 oraz 0 w p.p. Znaleźć rozkład warunkowy $X + Y | Y$ oraz rozkład warunkowy $Y | X + Y$.
9. Znaleźć rozkład warunkowy $X | X + Y$, jeżeli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie Poissona z parametrami odpowiednio λ, μ .
10. Pokazać, że dla dowolnego zdarzenia A i dowolnej zmiennej losowej Y mamy

$$P(A) = \int P(A | Y = y) dP^Y(y).$$