

Zestaw 2

1. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} \cdot \mathbf{1}_{\{(x, y): y > 0, |x| < y\}}(x, y).$$

Wyznaczyć gęstości rozkładów warunkowych $X|Y$, $Y|X$. Obliczyć $P(X > 0|Y > 1)$ oraz $P(Y > 1|X > 0)$.

2. Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Wyznaczyć gęstość rozkładu warunkowego $\max(X, Y)|\min(X, Y)$.
3. Znaleźć rozkład warunkowy $X|X + Y$, jeżeli X, Y są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie normalnym $N(0, \sigma^2)$.
4. Wektor losowy $(X_1, X_2)'$ ma rozkład normalny $N(\mathbf{m}, \mathbf{A})$. Wyznaczyć rozkład warunkowy $X_1|X_1 + X_2$, gdy

$$\mathbf{m} = (1, -1)^T, \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

5. Niech $(X_1, X_2, X_3)' \sim N_3((\mathbf{0}, \Sigma))$, gdzie

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 4 & 1,5 & 1 \\ 1,5 & 1 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wyznaczyć rozkład warunkowy $X_1 + X_2|X_3$.

6. Niech $N, X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech zmienna X_i ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$ dla każdego i . Rozkład zmiennej losowej N jest dany wzorem $P(N = n) = p(1 - p)^{n-1}$ dla $n = 1, 2, 3, \dots$, $p \in (0, 1)$ jest ustalone. Wyznaczyć rozkład warunkowy $N|Y = y$, gdzie $Y = \max(X_1, \dots, X_N)$.
7. Znaleźć rozkład warunkowy $X|[X]$ oraz $[X]|X$, gdzie X ma rozkład wykładniczy z parametrem $\lambda = 1$. ($[a]$ oznacza część całkowitą liczby a .)
8. Tosia upiekła okrągły sernik. Pierwszy wrócił Bolek i ukroił sobie kawałek ciepłego sernika. Następnie przyszedł Lolek i ukroił sobie kawałek zimnego sernika. Zakładając, że wielkość każdego z ukrojonych kawałków ma rozkład jednostajny z tego, co aktualnie jest na stole. Obliczyć prawdopodobieństwo, że pozostało na stole co najmniej połowę upieczonego sernika.