

Zestaw 3

1. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $([0, 1], \mathcal{B}, P)$, gdzie P jest miarą Lebesgue'a. Rozważmy zmienne losowe

$$X(\omega) = \omega^2, \quad Y(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in [0, \frac{1}{4}), \\ 2, & \omega \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}), \\ 3, & \omega \in [\frac{3}{4}, 1]. \end{cases}$$

Wyznaczyć $E(X|Y)$.

2. Dana jest przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{G}, P)$. Niech $\Omega = (0, \pi)$, $\mathcal{G}$ zbiory borelowskie na Ω , P miara o gęstości względem miary Lebesgue'a $f(x) = \frac{1}{2} \sin(x)$. Niech $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$ sigma ciało generowane przez $(0, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{3}, \pi)$.
Dla zmiennej losowej $X(\omega) = 2\omega + 1$, wyznaczyć $E(X|\mathcal{F})$.

3. W urnie znajduje się 21 kul ponumerowanych od 1 do 21. Losujemy jedną kulę. Zmienna X przyjmuje wartość 1, gdy wyciągniemy kulę z numerem parzystym oraz 0 w p.p. Zmienna Y przyjmuje 1, gdy wyciągniemy kulę z numerem podzielnym przez 3 oraz 0 w p.p. Wyznaczyć $E(X|X + Y)$.

4. Niech $U_0, \dots, U_n$ niezależne zmienne losowe o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0, 1)$. Wyznaczyć $E(\max(U_0, \dots, U_n)|U_0)$.

5. Znaleźć $E(\max(X, Y)|\min(X, Y))$ dla X, Y niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie wykładniczym z parametrem $\lambda = 1$. Zadanie wykonać dwoma sposobami:

- (a) korzystając wprost z definicji warunkowej wartości oczekiwanej,
- (b) wykorzystując rozkład warunkowy.

6. Całkowita ilość X cząstek emitowanych przez próbkę radioaktywną ma rozkład Poissona z parametrem λ . Cząstki są rejestrowane niezależnie od siebie z prawdopodobieństwem p . Wyznaczyć wartość oczekiwaną liczby zarejestrowanych cząstek Y .

- (a) korzystając z własności warunkowej wartości oczekiwanej,
- (b) wyznaczając wpierw rozkład Y .

7. Mamy n osiedli położonych wzdłuż drogi w odległości 1 km od siebie. Osiedla obsługuje jedna karetka pogotowia. Każde kolejne wezwanie z jednakowym prawdopodobieństwem pochodzi z dowolnego osiedla i zostaje natychmiast przekazane do karetki, która oczekuje w osiedlu, w którym był ostatni chory. Jaka jest średnia odległość przejeżdżana przez karetkę w czasie jednego kursu?

8. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany przez gęstość

$$f(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{8} e^{-y} \cdot \mathbf{1}_{\{(x, y): y > 0, |x| < y\}}(x, y).$$

Wyznaczyć funkcję regresji Y względem X .

9. Dwuwymiarowa zmienna losowa $(X, Y)'$ ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y}, & \text{gdy } 0 < x < y < 1 \\ 0, & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Narysować wykres funkcji regresji Y względem X .

10. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład dany gęstością

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{dla } 0 < y < 1, 0 < x < \frac{1}{y} \\ 0, & \text{dla pozostałych } x, y \end{cases}$$

Wyznaczyć funkcję regresję Y względem X i naszkicować jej wykres.

11. Zmienne losowe $X_1, \dots, X_{25}$ są niezależne i mają rozkłady normalne $N(0, 1)$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Wyznaczyć funkcję regresji zmiennej S_{10}^2 względem S_{25} .

12. Rzucamy symetryczną kostką oraz prawidłową monetą. Zmienna losowa U przyjmuje wartość równą wyrzuconej liczbie oczek liczonej modulo 4. Zmienna losowa V przyjmuje wartość 2, gdy na monecie wypadnie orzeł oraz 1, gdy wypadnie reszka. Narysować wykresy funkcji regresji U względem V oraz funkcji regresji V względem U .

13. Niech $N, X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Niech zmienna X_i ma rozkład jednostajny na odcinku $(0, 1)$ dla każdego i . Rozkład zmiennej losowej N jest dany wzorem $P(N = n) = (1 - p)p^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots$, $p \in (0, 1)$ jest ustalone. Wyznaczyć $E(NZ_N)$, gdzie

$$Z_N = \begin{cases} \min(X_1, \dots, X_N), & \text{gdy } N > 0, \\ 0, & \text{gdy } N = 0. \end{cases}$$

14. Zmienne losowe $X_1, X_2, \dots$ są niezależne o tym samym rozkładzie i skończonej wariancji. Zmienna losowa N ma rozkład Poissona z parametrem λ i jest niezależna od zmiennych X_i . Pokazać, że

$$\text{Var} \left(\sum_{i=1}^N X_i \right) = \lambda E(X_1^2).$$

15. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie wykładniczym o gęstości: $f(x) = 2e^{-2x} \cdot \mathbf{1}_{(0, \infty)}(x)$. Niech N będzie zmienną losową niezależną od $X_1, X_2, \dots$ o rozkładzie ujemnym dwumianowym: $P(N = n) = \frac{\Gamma(r + n)}{\Gamma(r)n!} p^r (1 - p)^n$, dla $n \in \mathbb{N}_0$, gdzie $r > 0$ i $p \in (0, 1)$ są ustalonymi parametrami rozkładu. Niech

$$Z_N = \begin{cases} \min(X_1, \dots, X_N), & \text{gdy } N > 0 \\ 0, & \text{gdy } N = 0 \end{cases}.$$

Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej NZ_N .

16. Niech Y będzie całkowalną zmienną losową. Niech $(X, Y), Z$ są niezależne. Wykazać, że

$$E(Y|X, Z) = E(Y|X).$$