

Zestaw 4

1. Pokazać, że dla dowolnej stałej $c \in \mathbb{R}$ jest

$$Z_n \xrightarrow{P} c \iff Z_n \xrightarrow{d} c.$$

2. Podać przykład, że nie zachodzi implikacja odwrotna do

$$Z_n \xrightarrow{P} Z \implies Z_n \xrightarrow{d} Z.$$

3. Podać przykład, ciągów zmiennych losowych takich, że

$$X_n \xrightarrow{P} X \quad \wedge \quad Y_n \xrightarrow{d} Y$$

oraz nieprawda, że

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + Y.$$

4. Owad składa jaja zgodnie z rozkładem Poissona z parametrem a . W nocy mrówki kradną mu jaja. Szansa, że dane jajo zostanie ukradzione, wynosi p . Następnego dnia historia się powtarza (liczba złożonych jaj ma ten sam rozkład i jest niezależna od przeszłości) itd. Jaki jest rozkład graniczny liczb jaj ocalałych przed mrówkami.

5. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku $(0, 1)$. Czy istnieje zmienna losowa Y , taka że

$$n \cdot \min(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{d} Y?$$

6. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o tym samym rozkładzie o gęstości $f(x) = 2x\mathbf{1}_{(0,1)}(x)$. Dobrać α , tak, aby

$$n^\alpha \cdot \min(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{d} Y$$

dla pewnej niezdegenerowanej zmiennej losowej Y .

7. Niech $X_1, X_2, \dots$ będzie ciągiem zmiennych losowych takim, że

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} N(0, 1),$$

gdzie $E(X_n) = \mu_n$ oraz $\sigma_n^2 = \text{Var}(X_n)$. Ponadto rozważamy ciąg Y_n taki, że $P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$, $P(Y_n = n) = \frac{1}{n}$ oraz zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne. Zbadać zbieżność według rozkładu ciągu

$$\frac{X_n + Y_n - \mu_n}{\sigma_n}$$

8. Pokazać, że nie jest prawdziwe stwierdzenie:

$$(\mu_n \Rightarrow \mu) \implies (\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) \mu_n(B) \longrightarrow \mu(B))$$

9. (Metoda delta). Udowodnić, że jeśli

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} X \quad \wedge \quad Y_n \xrightarrow{d} 0,$$

to dla dowolnej funkcji f różniczkowalnej w zerze zachodzi

$$X_n (f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{d} f'(0)X.$$

10. Zakładając, że rozkłady zmiennych losowych X oraz $X_1, X_2, \dots$ mają rozkłady zadane przez gęstości $f, f_1, f_2, \dots$ względem miary Lebesgue'a, wykazać że

$$(f_n(x) \longrightarrow f(x) \quad \text{p.w. względem miary Lebesgue'a}) \quad \implies \quad X_n \xrightarrow{d} X$$