

Zestaw 5

1. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu Poissona.
2. Wyznaczyć funkcję charakterystyczną rozkładu wykładniczego z parametrem λ . Na jej podstawie, korzystając z własności funkcji charakterystycznej, wyznaczyć wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie wykładniczym.
3. X_1 oraz X_2 są niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie odpowiednio normalnym $N(0, 1)$ oraz jednostajnym $U(-1, 1)$.
Wyznaczyć funkcję charakterystyczną zmiennej losowej $Y = 2X_1 - X_2$.
4. Niech φ_X oznacza funkcję charakterystyczną zmiennej losowej X . Udowodnić, że φ_X jest funkcją okresową o okresie $\lambda \iff X$ jest zmienną losową o rozkładzie dyskretnym, którego nośnik jest zawarty w zbiorze $\{2\pi k/\lambda : k \in \mathbb{Z}\}$.
5. Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X dana jest wzorem $\varphi_X(t) = \cos^2 t$. Znaleźć rozkład zmiennej losowej X , jeżeli wiadomo, że przyjmuje ona wartości całkowite, tj. $P(X \in \mathbb{Z}) = 1$.
6. Rzucamy niesymetryczną monetą, dla której prawdopodobieństwo wypadnięcia orła jest równe p . Niech Y oznacza liczbę rzutów potrzebną do uzyskania k orłów. Wykazać, że

$$2pY \xrightarrow{d} \gamma_{k, \frac{1}{2}} \quad (p \rightarrow \infty),$$

gdzie $\gamma_{a,b}$ oznacza rozkład gamma o parametrach a, b .

Wskazówka: Funkcja charakterystyczna rozkładu $\gamma_{a,b}$ dana jest wzorem $\varphi(t) = (1 - \frac{it}{b})^{-a}$.