

Zestaw 6

1. Niech $I_1, I_2, \dots; X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi, X_i mają ten sam rozkład, $EX_i = \mu$, $Var(X_i) = \sigma^2$; $P(I_i = 1) = p$, $P(I_i = 0) = 1 - p$. Niech $S_n = \sum_{i=1}^n I_i X_i$ oraz $J_n = \sum_{i=1}^n I_i$. Zbadaj zbieżność rozkładu zmiennych losowych

$$\frac{S_n - J_n \mu}{\sqrt{n p}} \quad \text{oraz} \quad \frac{S_n - J_n \mu}{\sqrt{n} \sigma}, \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$

2. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ o jednakowych rozkładach jednostajnych na przedziale $(0, 2)$. Niech $Y_n = X_1 \cdot \dots \cdot X_n$. Pokazać, że $\lim_{n \rightarrow \infty} P(Y_n \leq 1) = 1$.
3. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ o jednakowych rozkładach jednostajnych na przedziale $(0, 1)$. Niech $Y_n = (X_1 \cdot \dots \cdot X_n)^{-1}$. Pokazać, że $\sqrt{n}(Y_n - e) \xrightarrow{d} N(0, e)$.
4. Na kampusie są dwie restauracje mające po 120 miejsc. 200 osób idzie do nich jednocześnie na obiad, wybierając losowo i niezależnie od siebie jedną z nich. Jakie jest prawdopodobieństwo, iż w którejś restauracji zabraknie miejsc. Ile miejsc powinny mieć te restauracje, aby to prawdopodobieństwo nie przekraczało 0,001?
5. Niech Y_k będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $P(Y_k = 0) = 1 - 1/k$ oraz $P(Y_k = k) = 1/k$. Sprawdź, czy ciąg Y_k spełnia założenia twierdzenia Lapunowa.
6. Niech Y_k będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych, $P(Y_k = 2^k) = P(Y_k = -2^k) = 1/2$. Sprawdź, czy ciąg Y_k spełnia założenia twierdzenia Lapunowa.
7. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ takich, że $P(X_k = 1) = P(X_k = -1) = (1 - k^{-2})/2$, $P(X_k = k^{7/10}) = P(X_k = -k^{7/10}) = k^{-2}/2$. Czy prawdą jest, że $X_1 + \dots + X_n \sim AN(0, n)$?