

Zestaw 7

1. Rozważamy ciąg niezależnych zmiennych losowych $X_1, X_2, \dots$ o tym samym rozkładzie, $EX_1 = 0$, $Var(X_1) = 1$, $EX_1 < \infty$. Wykazać, że

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{\sqrt{X_1^2 + \dots + X_n^2}} \xrightarrow{d} N(0, 1)$$

2. Rozważamy zmienną losową o rozkładzie chi-kwadrat $X_n \sim \chi^2$. Wykazać, że rozważana zmienna losowa ma asymptotyczny rozkład normalny, tj. $X_n \sim AN(n, 2n)$.
3. Niech $X_1, X_2, \dots$ niezależne zmienne losowe o rozkładzie wykładniczym, tj. $X_1 \sim Exp(\lambda)$. Wyznaczyć rozkład graniczny zmiennej losowej

$$Y_n = \frac{1}{\bar{X}_n},$$

gdzie $\bar{a}_n$ oznacza średnią arytmetyczną ciągu $a_1, \dots, a_n$.

4. Niech $X_n \sim AN(n, 2n)$. Sprawdzić czy

$$\text{a) } \frac{n-1}{n} \sim AN(n, 2n) \quad \text{b) } \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}} \sim AN(n, 2n)$$