

1 Zbieżność zmiennych losowych; prawa wielkich liczb

Wskazówka.

$$X_n \xrightarrow{p.n.} X \iff P\left(\left\{\omega : \lim_{n \rightarrow \infty} X_n(\omega) = X(\omega)\right\}\right) = 1$$

$$X_n \xrightarrow{P} X \iff P(|X_n - X| > \epsilon) \rightarrow 0$$

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \iff E|X_n - X|^p \rightarrow 0$$

MPWL - mocne prawo wielkich liczb,

SPWL - słabe prawo wielkich liczb

Zadania z wykładu.

Zadanie 1.1. Wykazać mierzalność zbioru

$$\{\omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}$$

Zadania obowiązkowe - zbieżności.

Zadanie 1.2. Dany jest ciąg zmiennych losowych (X_n) o rozkładach:

$$P(X_n = \frac{1}{n}) = \frac{1}{2}, \quad P(X_n = -\frac{1}{n}) = \frac{1}{2}$$

Pokazać jest on zbieżny w L^p ($p > 0$) i $p.n.$.

Zadanie 1.3. Zmienna losowa X ma rozkład jednostajny na przedziale $(0, 1)$. Definiujemy ciąg

$$Y_n = n^{\frac{2}{3}} \mathbf{1}_{[0, \frac{1}{n}]}(X).$$

Zbadać zbieżność ciągu (X_n) wg. prawdopodobieństwa, prawie wszędzie i w L^1 .

Zadanie 1.4. O ciągu zmiennych losowych (X_n) wiadomo, że

$$X_n - X_m \sim \frac{1}{\pi \sigma_{nm}} \frac{1}{1 + \frac{x^2}{\sigma_{nm}^2}},$$

gdzie $x \in \mathbb{R}$ oraz

$$\sigma_{nm}^2 = \frac{|m - n|}{mn}.$$

Zbadać zbieżność wg. prawdopodobieństwa ciągu (X_n) .

Zadanie 1.5. Dany jest ciąg (X_n) o rozkładzie

$$P(X_n = -n - 4) = \frac{1}{n + 4}, \quad P(X_n = n + 4) = \frac{3}{n + 4}, \quad P(X_n = -1) = 1 - \frac{4}{n + 4}.$$

Pokazać, że (X_n) jest zbieżny wg. prawdopodobieństwa.

Zadanie 1.6. Udowodnić, że jeśli dla pewnego ciągu o wyrazach dodatnich (ϵ_n) takiego, że $\epsilon_n \rightarrow 0$ mamy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n - X| > \epsilon_n) < \infty,$$

to $X_n \xrightarrow{p.n.} X$.

Zadanie 1.7. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależne o tym samym rozkładzie i niech istnieje $E|X_1|$. Udowodnić, że

$$\frac{1}{n} \max_{i=1, \dots, n} |X_i| \xrightarrow{P} 0.$$

Zadania obowiązkowe - prawa wielkich liczb.

Zadanie 1.8. Niech (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych niezależnych o jednakowym rozkładzie ze skończoną wariancją. Oznaczamy $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pokazać, że jeśli dla każdego $x \in \mathbb{R}$ mamy

$$P\left(\frac{S_n - ES_n}{DS_n} < x\right) = \phi(x),$$

gdzie $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$, $\phi(x)$ - dystrybuenta $N(0, 1)$, to ciąg (X_n) spełnia SPWL.

Zadanie 1.9. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych (X_n) o gęstościach

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[4]{n}} e^{-\frac{(x - \frac{n}{2\sqrt{n}})^2}{2\sqrt{n}}}$$

Czy spełnia on SPWL?

Zadanie 1.10. Udowodnić, że jeśli $D^2(X_n) \leq C < \infty$ oraz współczynnik korelacji

$$\rho(X_i, X_j) \rightarrow 0 \text{ dla } |i - j| \rightarrow \infty,$$

to (X_n) spełnia SPWL.

Zadanie 1.11. Dany jest ciąg niezależnych zmiennych losowych niezależnych i o tym samym rozkładzie. Wiadomo, że

$$EX_1 = 0, \quad EX_1^4 = c.$$

Pokazać, że ten ciąg spełnia MPWL.

Zadanie 1.12. Niech (X_n) będzie niezależnym ciągiem zmiennych losowych o rozkładach

$$P(X_n = n + 1) = P(X_n = -(n + 1)) = \frac{1}{2(n + 1) \log(n + 1)}$$

$$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{(n + 1) \log(n + 1)}.$$

Pokazać, że ciąg ten spełnia SPWL, a nie spełnia MPWL.