

3 Warunkowa wartość oczekiwana

Wskazówka. Warunkową wartością oczekiwaną całkowalnej zmiennej losowej $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \longrightarrow \mathbb{R}$ względem sigma ciała $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ nazywamy zmienną losową $E(X|\mathcal{G})$ taką, że

(1) $E(X|\mathcal{G})$ jest $\mathcal{G}$ -mierzalna i P -całkowalna

(2)

$$\forall G \in \mathcal{G} \quad \int_G E(X|\mathcal{G}) dP = \int_G X dP$$

Wskazówka.

$$E(\varphi(X)|Y = y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f_{X|Y}(x|y) dx,$$

gdzie

$$f_{X|Y}(x|y) = \begin{cases} \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx} & \text{dla } \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) dx \neq 0 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Wskazówka.

$$E[X - E(X|Y)]^2 = \min_{h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}} E[X - h(Y)]^2$$

Zadania z wykładu.

Zadanie 3.1. Udowodnić, że jeśli Y jest całkowalną zmienną losową oraz wektor (X, Y) i zmienna Z są niezależne, to

$$E(Y|X, Z) = E(Y|X).$$

Zadania obowiązkowe - obliczanie WWO.

Zadanie 3.2. Dany jest dwuwymiarowy rozkład wektora (X, Y)

$X \downarrow, Y \rightarrow$	0	1	2
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
1	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Znaleźć $E(X|Y)$ oraz $E(E(X|Y))$.

Zadanie 3.3. Niech $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ i $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\Omega)$, $P = \lambda$. Niech X, Y będą zmiennymi losowymi na Ω z gęstością $f(x, y) = \frac{3}{2}(x^2 + y^2)$. Korzystając wyłącznie z formalnej definicji WWO wyznaczyć $E(X|Y)$.

Zadanie 3.4. Znaleźć

$$E(\max\{X, Y\} | \min\{X, Y\})$$

dla X, Y niezależnych zmiennych losowych o jednostkowym rozkładzie wykładniczym. Zadanie wykonać dwoma sposobami:

- (1) wprost z definicji WWO
- (2) z gęstości warunkowej

Zadanie 3.5. Zmienne losowe X, Y są niezależne i mają ten sam rozkład całkowalny. Znaleźć $E(X|X+Y)$.

Zadanie 3.6. Dane jest n niezależnych zmiennych losowych $X_1, \dots, X_n$ o tym samym rozkładzie całkowalnym. Niech $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$. Znaleźć $E(X_1|\bar{X})$.

Zadanie 3.7. Niech $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, I)$, gdzie I jest macierzą jednostkową. Obliczyć $E(X|X^2 + Y^2)$.

Zadanie 3.8. Niech $(X, Y) \sim U(A)$, gdzie U - rozkład jednostajny, $A = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \leq 1\}$. Znaleźć $E(X|Y)$.

Zadanie 3.9. Niech $(X, Y) \sim \mathcal{N}(0, \Sigma)$, gdzie

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \sigma_{XY} \\ \sigma_{XY} & \sigma_Y^2 \end{bmatrix}.$$

Obliczyć $E(X|Y)$.

Zadanie 3.10. Niech (X, Y) ma rozkład o gęstości $f(x, y) = 8xy \mathbf{1}_{\{x>0, y>0, x^2+y^2<1\}}(x, y)$. Obliczyć $E(Y|X = \frac{1}{2})$.

Zadanie 3.11. Dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) ma rozkład zadany funkcją gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{y} & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{w p.p.} \end{cases}$$

Narysować wykres funkcji regresji Y względem X .

Zadania obowiązkowe - zastosowanie WWO.

Zadanie 3.12. Obliczyć wartość oczekiwaną liczby prób w schemacie Bernoulliego przeprowadzanych aż do momentu uzyskania kolejno

- (a) sukcesu i porażki
- (b) dwóch sukcesów i porażki

Zadanie 3.13. Mamy n osiedli położonych wzdłuż drogi w odległości 1 km od siebie. Osiedla obsługuje jedna karetka pogotowia. Każde kolejne wezwanie z jednakowym prawdopodobieństwem pochodzi z dowolnego osiedla i zostaje natychmiast przekazane do karetki, które oczekuje w osiedlu, w którym był ostatni chory. Jaka jest średnia odległość przejeżdżana przez karetkę w czasie jednego kursu?

Zadanie 3.14. Z odcinka $[0, 1]$ wybrano losowo (czyli zgodnie z rozkładem jednostajnym) punkt U , a następnie z odcinka $[0, U]$ - również losowo - punkt V . Obliczyć średnią długość odcinka $[0, V]$.

Zadania dodatkowe.

Zadanie 3.15. Niech zmienne X, Y będą niezależne o rozkładzie $U([0, 1])$. Definiujemy $U = \min\{X, Y\}$, $V = \max\{X, Y\}$. Znaleźć $E(\sin(UV)|U)$.

Zadanie 3.16. Niech $A, B \subset \Omega$ będą zdarzeniami o niezerowym prawdopodobieństwie. Definiujemy zmienne losowe w następujący sposób

$$X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega)$$

$$Y(\omega) = \mathbf{1}_B(\omega)$$

Obliczyć $E(X|Y)$.