

4 Zbieżność słaba

Zadania z wykładu.

Zadanie 4.1. Niech $c \in \mathbb{R}$, a (X_n) będzie ciągiem zmiennych losowych. Udowodnić, że

$$X_n \xrightarrow{P} c \iff X_n \xrightarrow{d} c$$

Zadania obowiązkowe.

Zadanie 4.2. Wykorzystując tw. Scheffego uzasadnić, że jeśli mamy ciąg zmiennych losowych o gęstościach f_n i wiadomo, że dla pewnej gęstości f

$$\lambda\left(\left(\{x : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)\}'\right)\right) = 0,$$

to ciąg (X_n) jest zbieżny wg. rozkładu do rozkładu o gęstości f .

Zadanie 4.3. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $U([0, 1])$. Definiujemy zmienne losowe

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

$$Z_n = (1 - Y_n)n.$$

Pokazać, że ciąg Z_n jest zbieżny wg. rozkładu. Jaka jest granica?

Zadanie 4.4. Niech $X_1, X_2, \dots$ będą niezależnymi zmiennymi losowymi o rozkładzie $Exp(\alpha)$. Definiujemy zmienne losowe

$$Y_n = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\},$$

$$Z_n = n^{-\frac{1}{\alpha}} Y_n.$$

Pokazać, że ciąg Z_n jest zbieżny wg. rozkładu. Jaka jest granica?

Zadanie 4.5. Dany jest ciąg zmiennych losowych (X_n) taki, że

$$\frac{X_n - \mu_n}{\sigma_n} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

gdzie $\mu_n = E(X_n)$ oraz $\sigma_n = \sqrt{Var(X_n)}$. Ciąg (Y_n) ma rozkład

$$P(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}, \quad P(Y_n = n) = \frac{1}{n},$$

oraz zmienne X_n i Y_n są niezależne. Zbadać zbieżność wg. rozkładu ciągu

$$Z_n = \frac{X_n + Y_n - \mu_n}{\sigma_n}.$$

Zadanie 4.6. Udowodnić, że jeśli

$$X_n \xrightarrow{P} X,$$

to

$$X_n \xrightarrow{d} X.$$

Zadanie 4.7. Udowodnić, że jeśli $c \in \mathbb{R}$

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

oraz

$$Y_n \xrightarrow{d} c,$$

to

$$X_n + Y_n \xrightarrow{d} X + c.$$

Zadanie 4.8. Udowodnić, że jeśli $c \in \mathbb{R}$

$$X_n \xrightarrow{d} X$$

oraz

$$Y_n \xrightarrow{d} c,$$

to

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} cX.$$

Zadanie 4.9 (Metoda delta). Udowodnić, że jeśli $c \in \mathbb{R}$

$$X_n Y_n \xrightarrow{d} X$$

oraz

$$Y_n \xrightarrow{d} 0,$$

a f jest różniczkowalna w zerze, to

$$X_n(f(Y_n) - f(0)) \xrightarrow{d} f'(0)X.$$

Zadanie 4.10. Podać przykład ciągu dystrybuant F_n zbieżnego punktowo do funkcji, która nie jest dystrybuantą.

Zadanie 4.11 (Twierdzenie Diniego). Wykazać, że jeśli ciąg dystrybuant jest zbieżny punktowo do dystrybuanty ciągłej F , to zbieżność jest jednostajna.