

6 Twierdzenia graniczne

Zadanie 6.1. Na podstawie losowej próby szacujemy frakcję osób potrafiących czytać i pisać. Wiadomo na pewno, że jest to ponad 90% dorosłej populacji. Ile osób musi liczyć próba, jeśli w prawdopodobieństwie 0.9 błąd oszacowania ma być mniejszy niż 0.01?

Zadanie 6.2. Niech $X_1, X_2, \dots, X_n$ - próba prosta z rozkładu o parametrach $EX_i = 0$ oraz $Var X_i = 1$. Pokazać, że

$$\frac{\sqrt{n}S_n}{\sum_{i=1}^n X_i^2} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1),$$

gdzie $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Zadanie 6.3. Wiadomo, że $X_n \sim Poiss(\lambda_n)$, gdzie $\lambda_n \rightarrow \infty$. Udowodnić, że

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{\lambda_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

oraz

$$\frac{X_n - \lambda_n}{\sqrt{X_n}} \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1)$$

Zadanie 6.4. Załóżmy, że $U_1, U_2, \dots, U_n$ są iid z $U(0, 1)$. Rozważmy ciąg średnich geometrycznych $\sqrt[n]{U_1 U_2 \dots U_n}$. Wybierz i uzasadnij prawdziwe stwierdzenie:

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt[n]{U_1 U_2 \dots U_n} \leq \frac{1}{2}) = 0$
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt[n]{U_1 U_2 \dots U_n} \leq \frac{1}{3}) = 0$
- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt[n]{U_1 U_2 \dots U_n} \leq \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$
- (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt[n]{U_1 U_2 \dots U_n} \leq \frac{1}{e}) = 1$
- (E) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\sqrt[n]{U_1 U_2 \dots U_n} \leq \frac{1}{3}) = 1$

Zadanie 6.5. $X_1, \dots, X_n$ - iid z $U[0, 1]$. Definiujemy zmienną losową $Y_n = n \min\{X_1, \dots, X_n\}$. Pokazać, że

$$Y_n \xrightarrow{d} Exp(1).$$

Zadanie 6.6. Prawdopodobieństwo urodzenia chłopca wynosi 0.515. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że wśród 1000 noworodków będzie co najmniej 480 dziewczynek?

Zadanie 6.7. Aparat wykonuje w takich samych warunkach serię niezależnych zdjęć. Wiadomo, że 10% zdjęć spełnia stawiane wymagania techniczne. Ile zdjęć należy wykonać, aby z prawdopodobieństwem 0.9 co najmniej 10 zdjęć spełniało stawiane wymagania?