

7 Twierdzenia graniczne 2

Zadania z wykładu.

Zadanie 7.1. Pokazać, że dla $n \rightarrow \infty$

$$\sum_{k=1}^n k^3 \sim n^4/4.$$

Zadanie 7.2. Niech będzie dany ciąg wektorów losowych $\mathbf{X}_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)}, \dots, X_n^{(m)})$. Definiujemy zbieżność wg. prawdopodobieństwa jako

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \iff \|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\| \xrightarrow{P} 0$$

Pokazać, że

$$\mathbf{X}_n \xrightarrow{P} \mathbf{X} \iff X_n^{(j)} \xrightarrow{P} X^{(j)}.$$

Zadania obowiązkowe.

Zadanie 7.3. Rzucono 100 razy kostką do gry. Serię stu rzutów uznajemy za sukces, jeżeli uzyskano w sumie przynajmniej 400 oczek. Ile przeciętnie serii rzutów należy wykonać, aby uzyskać sukces.

Zadanie 7.4. Z jeziora wyłowiono 200 ryb, oznakowano je i wpuszczono do wody. Po pewnym czasie wyłowiono 100 ryb, a wśród nich było 8 oznakowanych. Za rozsądne oszacowanie liczby ryb w jeziorze można uznać taką liczbę ryb, dla której zrealizowało się zdarzenie o największym prawdopodobieństwie. Jak to liczba?

Zadanie 7.5. Aby stwierdzić jak wiele wyborców popiera partię ABC losujemy próbkę i na niej przeprowadzamy badanie. Jak duża powinna być ta próba, aby uzyskany wynik różnił się od rzeczywistego poparcia dla partii ABC nie więcej niż o $b=3\%$ z prawdopodobieństwem $1-\alpha=0,95$. Jaki będzie wynik, jeżeli przed losowaniem próbki mamy częściową informację, że poparcie dla ABC nie przekracza 20% ?

Zadanie 7.6. Na kampusie uniwersyteckim są dwie restauracje po 120 miejsc każda. Wiadomo, że codziennie 200 osób będzie chciało zjeść obiad, a wyboru restauracji dokonują losowo i niezależnie. Jaka jest szansa, że w którejś restauracji zabraknie miejsc? Ile miejsc należy przygotować w każdej restauracji, by powyższe prawdopodobieństwo było mniejsze od 0,001?

Zadanie 7.7. Zmienne losowe X_n i Y_n są niezależne i mają rozkład Poissona z parametrem $2n$. Zbadać zbieżność wg. rozkładu ciągu $n^{-\frac{5}{2}}(X_n^3 - Y_n^3)$.

Zadanie 7.8. Wiadomo, że w pewnym kilkumilionowym kraju 60% dorosłych osób ma wykształcenie podstawowe, 30% średnie i 10% wyższe. Oszacuj prawdopodobieństwo, że wśród 1000 losowo wybranych dorosłych mieszkańców kraju osób z wykształceniem średnim jest przynajmniej o 180 więcej niż z wyższym.

Zadanie 7.9. Niech będą niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznym rozkładzie o gęstości

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \mathbf{1}_{[0,1]}(x).$$

Niech $U_n = (X_1 X_2 \cdots X_n)^{1/n}$. Wybierz prawidłową odpowiedź

- (A) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n \leq e^{-2}) = 1$
- (B) $\lim_{n \rightarrow \infty} P((U_n - e^{-2})\sqrt{n} < 4e^{-2}) = 0,977$
- (C) $\lim_{n \rightarrow \infty} P((U_n - e^2)\sqrt{n} < 4e^2) = 0,977$
- (D) $\lim_{n \rightarrow \infty} P((U_n - e^{-2})\sqrt{n} > 8e^{-4}) = 0,023$
- (E) $\lim_{n \rightarrow \infty} P(U_n \geq e^{-2}) = 1$

Rozwiązanie. B

Zadanie 7.10. Zmienne losowe X_1, X_2, X_3, X_4 są niezależne i mają rozkład $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Obliczyć

$$P(X_1^2 - 5X_2^2 < 5X_3^2 - X_4^2).$$

Rozwiązanie. 5/6