

8 Proces Poissona

Wskazówka. Niech T będzie zbiorem chwil czasowych, a $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ przestrzenią probabilistyczną. Procesem stochastycznym nazywamy odwzorowanie

$$X : T \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R},$$

takie, że dla każdego $t \in T$ X_t jest zmienną losową na $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Wskazówka. Niech $T_1, T_2, \dots$ będą próbą prostą z $Exp(\lambda)$. Proces Poissona $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ definiujemy jako

$$N_t = \sup\{n : \sum_{k=1}^n T_k \leq t\}$$

Wskazówka. Własności:

- $N_t \sim Poiss(\lambda t)$
- $N_t - N_s \sim Poiss((t-s)\lambda)$ jednorodność przyrostów
- jeśli $t_1 < t_2 < \dots < t_k$, to zmienne losowe

$$N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, N_{t_3} - N_{t_2}, \dots, N_{t_k} - N_{t_{k-1}}$$

są niezależne (niezależność przyrostów)

Zadania obowiązkowe.

Zadanie 8.1. Obliczyć $Cov(N_t, N_s)$.

Zadanie 8.2. Niech $0 \leq s < t < u$. Obliczyć

- (a) $P(N_s = 1, N_t = 2)$
- (b) $P(N_s = i, N_t = j, N_u = k)$
- (c) $P(N_1 = 1, N_2 \leq 2, N_3 \leq 3)$

Zadanie 8.3. Udowodnić, że

$$\frac{N_t}{t} \xrightarrow{p.n.} \lambda$$

Zadanie 8.4. Obliczyć

$$P(N_t = i | N_s = j).$$

Jaki otrzymujemy rozkład?

Zadanie 8.5. Niech proces Poissona $\{N_t\}_{t \in \mathbb{R}_+}$ będzie niezależny od nieujemnej zmiennej losowej T o wartości oczekiwanej μ i wariancji σ^2 . Obliczyć $Cov(T, N_T)$ oraz $Var(N_T)$.