**AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA**

im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki
Katedra Systemów Energetycznych i Urządzeń Ochrony Środowiska

# Metody Numeryczne

## Laboratorium 5

## Rozwiązywanie równań różniczkowych I rzędu

dr inż. Krystian Szopa
KRAKÓW, 2020

# 1 Wprowadzenie do zajęć

Podstawy teoretyczne do zagadnienia **rozwiązywania równań różniczkowych** znajdują się w skrypcie wykładowcy:
Czajka Ireneusz, Gołaś Andrzej, *Inżynierskie metody analizy numerycznej i planowanie eksperymentu*, Wydawnictwo AGH, Kraków 2017.
Skrypt jest dostępny w bibliotece AGH lub w wersji online poprzez stronę bilbioteki.

Student przed przystąpieniem do realizacji instrukcji powinien zapoznać się z zagadnieniem **rozwiązywania równań różniczkowych**, przedstawionym w **rozdziale 6** skryptu.

# 2 Metoda Eulera

Zjawiska fizyczne występujące w otaczającym nas świecie w dużej mierze opisane są równaniami różniczkowymi. Tak samo modele matematyczne zjawisk zachodzące w obiektach technicznych, z którymi spotyka się inżynier, oparte są na równaniach różniczkowych. Rozwiązywanie równań różniczkowych na drodze analitycznej (w postaci ścisłej) często jest trudne, a dla bardziej skomplikowanych zagadnień wręcz niemożliwe. Dlatego ważne jest żeby przyszły inżynier potrafił rozwiązywać równania różniczkowe z wykorzystaniem metod obliczeniowych. Z rodzajami równań różniczkowych i podstawowymi informacjami w kontekście metod numerycznych można zapoznać się w skrypcie [1] w rozdziale 6.1.

## 2.1 Metoda Eulera jawna

Metoda Eulera służy do rozwiązywania równań różniczkowych pierwszego rzędu w postaci

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad \text{gdzie} \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

gdzie $y(x_0) = y_0$ jest warunkiem początkowym pozwalającym jednoznacznie rozwiązać równanie różniczkowe.

Po wprowadzeniu dyskretyzacji i zastąpieniu pochodnej funkcji w punkcie ilorazem różnicowym otrzymujemy równanie różnicowe w postaci

$$\frac{y_{k+1} - y_k}{h} = f(x_k, y_k) \tag{2}$$

W powyższym równaniu wartości dla parametrów oznaczonych indeksem $k$ są znane. Jedyną nieznaną wartością jest $y_{k+1}$. Dlatego przekształcamy to równanie do postaci

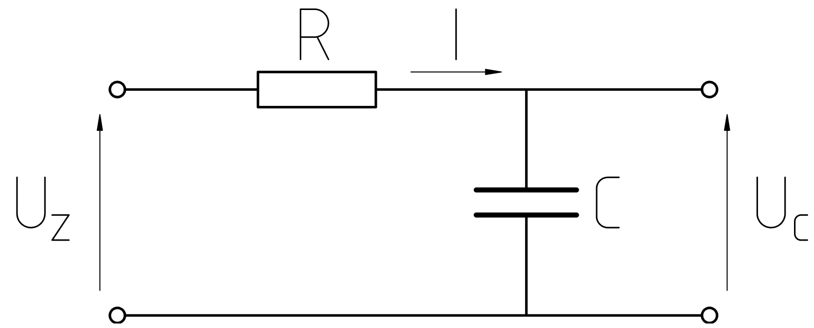
$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_k, y_k) \tag{3}$$

tym samym otrzymujemy zależność na **metodę Eulera w postaci jawnej**. Metoda ma charakter iteracyjny i kolejne wartości $y_{k+1}$ będą wyznaczane na podstawie wartości $y_k$ obliczonych w kroku poprzednim.

Przekształcenia oraz interpretacja graficzna metody są zamieszczone w skrypcie [1] w rozdziale 6.2.2.

**Przykład 1.** Dany jest obwód elektryczny przedstawiający ładowanie kondensatora (rys. 1). Prąd ładowania kondensatora płynący przez opornik opisany jest równaniem różniczkowym pierwszego rzędu w postaci

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot I \tag{4}$$




Rysunek 1: Układ ładowania kondensatora

Rezystancja opornika wynosi $R = 18$ k$\Omega$, pojemność kondensatora $C = 500$ $\mu$F. W chwili początkowej $t = 0$ natężenie prądu wynosi $I_0 = 0,5$ A. Obliczyć jawną metodą Eulera zmianę natężenie prądu płynącego w obwodzie w czasie od 0 do 60 sekund, przyjąć krok czasowy $h = 5$ s. Wyniki przedstawić na wykresie.

Zanim przystąpimy do pisania programu przyjrzyjmy się tematowi zadania i przekształćmy równanie różniczkowe (4) do postaci (3). Zacznijmy jednak od początku, porównajmy ogólny zapis równania różniczkowego (1) z naszym tematem zadania (4)

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \qquad \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot I$$

Po pierwsze należy powiedzieć, że $y$ jest zależne od $x$, czyli $y(x)$. Nie zostało to rozpisane powyżej jednak można by to przedstawić następująco $\frac{dy(x)}{dx} = f(x, y(x))$. Tak samo jest z równaniem różniczkowym w naszym temacie zadania, natężenie prądu jest funkcją czasu $I(t)$.

Dalej, przyglądając się tym dwóm zależnościom możemy wywnioskować, że odpowiednikiem parametru $x$ w zapisie ogólnym, w naszym zadaniu będzie czas $t$. Natomiast parametrowi $y$ będzie odpowiadało natężenie prądu $I$.

Spójrzmy teraz na prawą stronę tych równań. W równaniu z tematu zadania po prawej stronie jest tylko parametr $I$, natomiast czas $t$ nie występuje w tej zależności jako osobna zmienna. $R$ i $C$ to są stałe. Odpowiednikiem $f(x, y)$ jest w tym zadaniu

$f(I) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot I.$

Jeżeli jest taka potrzeba to przeczytaj ten opis raz jeszcze, a następnie zapisz (na razie na kartce) wzór na metodę Eulera dla naszego tematu zadania. Porównaj równania (1) z (3). A następnie wykonaj analogiczny zapis dla (4). Zapis $f(I)$ powinien być rozpisany już z podstawieniem $-\frac{1}{R \cdot C} \cdot I$.
Zapis będzie się zaczynał od

$$I_{k+1} =$$

Postaraj się zapisać tę zależność samodzielnie. W ostateczności zajrzyj do odpowiedzi.

Mając wyznaczony wzór na metodę Eulera, możemy przystąpić do implementacji. W pierwszej kolejności należy wprowadzić wszystkie znane parametry. Wprowadzamy $R$ i $C$ - **uwaga**, pamiętaj żeby uwzględnić rząd wielkości umieszczony przy jednostce fizycznej (dane wprowadzamy w podstawowej jednostce układu SI). Następnie wprowadzamy wektor czasu według treści zadania.

Ostatnią informacją jaką posiadamy jest warunek początkowy. W chwili 0, wartość natężenie prądu wynosi 0,5 A i tę wartość należy wprowadzić na pierwszą pozycję do wektora **I**.

Teraz należy się zastanowić w jaki sposób ma działać program. Naszym zadaniem jest wyznaczenie wektora **I**. Przyjrzyjmy się wektorom **t** i **I**:

$$t \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 & 10 & 15 & 20 & \ldots & 60 \end{bmatrix}$$

$$I \quad \begin{bmatrix} 0.5 & & & & & & \end{bmatrix}$$

W chwili 0, natężenie prądu wynosi 0.5 A. I teraz za pomocą wyznaczonego wzoru na metodę Eulera obliczamy natężenie w kolejnych chwilach czasowych. Przypominam, że według tego wzoru kolejne wartości obliczamy na podstawie tych z kroku poprzedniego. Czyli natężenie prądu w chwili 5 s wyznaczymy na podstawie wartości prądu w chwili 0 (punkt początkowy). Natomiast natężenie prądu w chwili 10 s wyznaczymy na podstawie wartości w chwili 5 s i tak dalej, aż do momentu obliczenia natężenia prądu w chwili 60 s.

Po obliczeniu wszystkich wartości w wektorze **I** powinniśmy mieć dokładnie tyle samo elementów w obu wektorach. W związku z tym dane będzie można przedstawić na wykresie.

**Zadanie 1**. Dokończ zadanie opisane w **przykładzie 1**. Napisz program, który uzupełni wektor **I** o kolejne wartości metodą Eulera. Narysuj wykres natężenia prądu w funkcji czasu.

*Wskazówka:*
Ponieważ wzór ma charakter iteracyjny, dlatego należy zastosować pętlę. Zastanów się ile kroków ma zostać wykonanych. Zadanie jest proste i w pętli powinna znaleźć się dosłownie jedna linijka kodu z zaimplementowaną metodą Eulera dla treści zadania.

**Zadanie 2**. Rozwiązanie analityczne (ścisłe) tego zagadnienia jest opisane funkcją

$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{5}$$

Dorysuj krzywą dla rozwiązania dokładnego do otrzymanego wcześniej rozwiązania.

- Powyższa zależność jest już gotowym rozwiązaniem, więc NIE rozwiązuj jej ponownie metodą Eulera.
- Wartości natężenia prądu oblicz dla *zagęszczonego* wektora czasu (np. **`tt`**).
- Liczba **e** jest podstawą logarytmu naturalnego i Matlabie zapisujemy ją jako `exp( )`, przy czym w nawiasie zapisujemy to co jest w wykładniku potęgi - już nie zapisujemy dodatkowo ˆ.
- Podpisz krzywe na wykresie (dodaj legendę).

## 2.2 Metoda Eulera niejawna

Wzór na niejawną metodą Eulera możemy zapisać następująco

$$y_{k+1} = y_k + h \cdot f(x_{k+1}, y_{k+1}) \tag{6}$$

czyli podstawową różnicą w porównaniu z metodą jawną, jest obliczanie $f(x, y)$ na podstawie punktu $k + 1$.

Zmodyfikujmy więc wzór na metodę Eulera z tematu naszego zadnia, otrzymamy

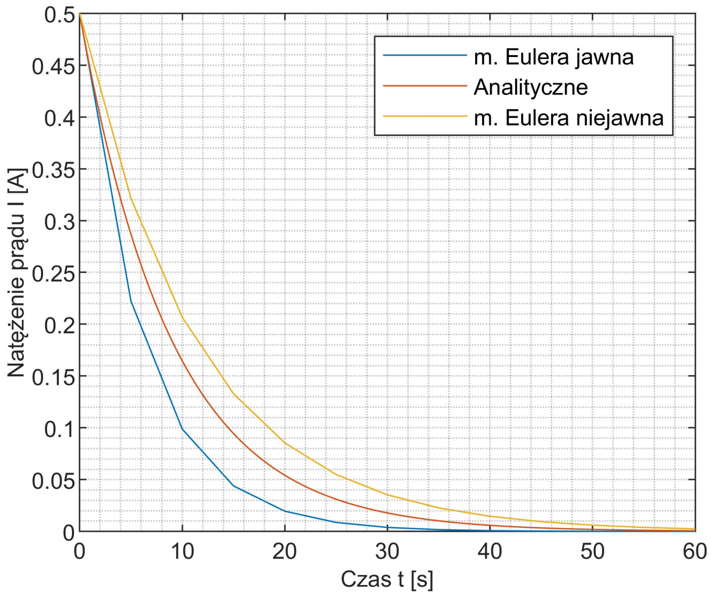
$$I_{k+1} = I_k + h \cdot \left( -\frac{1}{RC} \cdot I_{k+1} \right) \tag{7}$$

Czy wystarczy że w programie na metodę jawną zmodyfikujemy zapis `I(k)` na `I(k+1)`?

Oczywiście odpowiedź brzmi „nie”. Nie możemy w programie wyznaczyć wartości $I_{k+1}$ jeżeli po prawej stronie zależności również znajduje się ta poszukiwana wartość. To co w pierwszej kolejności należy zrobić to przekształcić równanie (7) w taki sposób, żeby $I_{k+1}$ znajdowało się tylko po lewej stronie równania. I dopiero wyznaczone w ten sposób równanie należy rozwiązać analogicznie do **zadania 1**.

**Zadanie 3**. Wykonaj przekształcenie zależności (7) w celu wyznaczenia $I_{k+1}$ i napisz program dla niejawnej metody Eulera. Wszystkie dane takie same jak w **zadaniu 1**. Przekształcenie równania wykonaj na kartce. Dorysuj krzywą do wykresu.
Metodę zapisz w tym samym skrypcie, ale pamiętaj żeby nadać nowe symbole i nie nadpisać wyników dla metody jawnej.

Rozwiązanie dla tych trzech zadań powinno wyglądać następująco:




Rysunek 2: Porównanie rozwiązań metodami Eulera jawną oraz niejawną (przy kroku 5 s) z rozwiązaniem ścisłym

Wraz ze zwiększaniem się ilości ładunku na kondensatorze natężenie prądu płynącego przez opornik maleje. Dla rozwiązań otrzymanych metodami Eulera można zauważyć wyraźną rozbieżność w stosunku do rozwiązania analitycznego. Wielkość tego błędu będzie zależała od kroku przyjętego w metodzie.

**Zadanie 4.** Sprawdź jak będą zmieniały się rozwiązania wraz ze zmianą kroku.

- Zmniejszaj krok w względem zadanego w temacie zdania. Sprawdź rozwiązanie dla kroku $h = \{2, 1, 0.1\}$.
- Zwiększ krok do $h = 10$. Porównaj wyniki otrzymane dla metod Eulera jawnej i niejawnej. Czy wiesz z czego wynika ta różnica?

Uwaga. Jeżeli przy zmniejszaniu kroku krzywe rozbiegają się względem rozwiązania analitycznego to prawdopodobnie program został źle zapisany.
Postaraj się rozwiązać zadanie samodzielne. Po rozwiązaniu zajrzyj do odpowiedzi na końcu instrukcji.

# 3 Metoda Rungego-Kutty IV rzędu

Metoda Rungego-Kutty czwartego rzędu służy do rozwiązywania równań różniczkowych i jest jedną z najczęściej stosownych metod numerycznych.

Metoda jest opisana następującymi wzorami:

$$n_1 = h \cdot f(x_k, y_k)$$

$$n_2 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{n_1}{2})$$

$$n_3 = h \cdot f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{n_2}{2})$$

$$n_4 = h \cdot f(x_k + h, y_k + n_3)$$

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}\Big(n_1 + 2n_2 + 2n_3 + n_4\Big)$$

Więcej na temat samej metody oraz znaczeniu poszczególnych współczynników $n_j$ można przeczytać w skrypcie w rozdziale 6.2.6.

Przed przystąpieniem do implementacji metody zastanówmy się jak powinna wyglądać struktura programu i w jaki sposób odnieść się do tematu naszego zadania.

Pierwsza ważna informacja jest taka, że cały powyższy zapis dotyczy pojedynczego kroku metody i wyznaczenia jednej nowej wartości. Oznacza to, że za każdym razem gdy wyznaczamy nową wartość w tablicy $y$ (w naszym zdaniu wektor $I$) trzeba od nowa wyliczyć wszystkie współczynniki $n_j$, a następnie podstawić je do zależności na $y_{k+1}$.

Teraz przyjrzyjmy się współczynnikom $n_j$. Pierwszy współczynnik $n_1$ to nic innego jak fragment zapisu, który znalazł się już w jawnej metodzie Eulera. Czyli dla treści naszego zadania ten wzór będzie wyglądał następująco

$$n_1 = h \cdot \left( -\frac{1}{RC} \cdot I_k \right)$$

Przy współczynniku $n_2$ może pojawić się mała wątpliwość, co do interpretacji zapisu i przełożenia tego na treść zadania. Zapis $x_k + \frac{h}{2}$ oznacza, że do zmiennej niezależnej $x$ w danym kroku należy dodać $h/2$. W naszym zdaniu odpowiednikiem zmiennej $x$ jest czas $t$. Jednak jeżeli przyjrzymy się funkcji z naszego zadania

$$f(I) = -\frac{1}{R \cdot C} \cdot I$$

to widzimy, że nie występuje tutaj $t$ jako zmienna niezależna. Więc dla tego konkretnego przypadku można tę część pominąć.

Jednak przy obliczaniu współczynnika $n_2$ widnieje też zapis $y_k + \frac{n_1}{2}$, czyli do zmiennej $y_k$ musimy dodać połowę wartości współczynnika obliczonego chwilę wcześniej. Oczywiście w naszym zadaniu odpowiednikiem $y_k$ jest natężenie prądu $I_k$ i właśnie do tej wartości należy dodać $n_1/2$.

**UWAGA!** $n_1/2$ dodajemy tylko do $I_k$, a nie do całej funkcji $f(I_k)$, więc pamiętaj o odpowiednim użyciu nawiasów. Jest to bardzo często popełniany błąd w tym zadaniu.

Współczynniki $n_3$ i $n_4$ obliczamy analogicznie do opisanego współczynnika $n_2$.

**Zadanie 5**. Rozwiąż zadanie metodą Rungego-Kutty IV rzędu, dla kroku $h = 5$. Narysuj krzywą (na tym samym wykresie co metody Eulera) i porównaj wyniki.

*Wskazówka:* Pamiętaj, że rozwiązanie metody na wykresie jest określone tylko w punktach, które uwzględniono w wektorze $t$. Natomiast odcinek łączący dwa kolejne punkty na wykresie jest tylko wizualizacją i nie oddaje rozwiązania. Możesz więc narysować same znaczniki w tych punktach (bez łączenia linią) lub wyróżnić znacznikami punkty na tle linii.

# 4 Zadanie dodatkowe

**Zadanie 6**. Podczas ładowania kondensatora w obwodzie przedstawionym na rys. 1, zmiana napięcia na kondensatorze jest opisana równaniem różniczkowym

$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot \Big(U_z - U_c\Big)$$

Obliczyć zmianę napięcia na kondensatorze $U_c$ wszystkimi poznanymi metodami obliczeniowymi, narysować wykres i porównać z rozwiązaniem analitycznym wyrażonym zależnością

$$U_c = U_z \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Przy czym napięcie zasilania jest stałe $U_z = 5$ V, a dane takie same jak w **Przykładzie 1**. W chwili początkowej $t = 0$ napięcie na kondensatorze $U_c = 0$.

# 5 Odpowiedzi do zadań

**Zadanie 1**. Dokończ zadanie opisane w **przykładzie 1**. Napisz program, który uzupełni wektor **I** o kolejne wartości metodą Eulera. Narysuj wykres natężenia prądu w funkcji czasu.

Oczywiście program powinien być napisany w taki sposób, żeby sam adaptował się do zmian. Czyli wszystkie dane należy wprowadzić na początku zadania.

Pamiętaj że bardzo duże i bardzo małe wartości możesz wprowadzać następująco. Rezystancja $R = 18$ k$\Omega$, możemy ją wpisać `R=18e3` (co oznacza $18 \cdot 10^3$). Tak samo pojemność kondensatora $C = 500$ $\mu$F wpisujemy `C=500e-6` lub `C=5e-4` (większość programów inżynierskich przyjmuje zapis w takim formacie).

Jedyny problem jaki może się tutaj pojawić to zaimplementowanie metody Eulera. Po przeczytaniu opisu w Przykładzie 1 Student powinien zapisać wzór na metodę Eulera dla tematu zadania

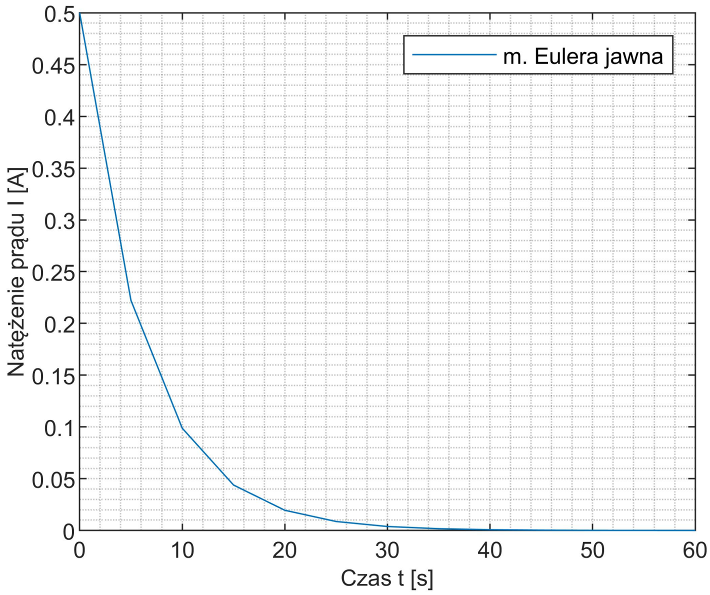
$$I_{k+1} = I_k + h \cdot \left( - \frac{1}{RC} \cdot I_k \right)$$

Następnie należy wprowadzić wartość początkową do wektora **I** co można zapisać w programie

`I(1)=0.5` lub `I=0.5`

Kolejno otwieramy pętlę **for** która ma być wykonana tyle razy ile brakuje wyrazów w wektorze **I**. Czyli tyle samo ile jest punktów czasowych pomniejszonych o 1, ponieważ jedną wartość już mamy wpisaną (związaną z warunkiem początkowym).

Następnie w pętli **for** znajdzie się zależność zapisana powyżej (jedna linijka). Pamiętaj o prawidłowym indeksowaniu wektora.



**Zadanie 2**. Rozwiązanie analityczne (ścisłe) tego zagadnienia jest opisane funkcją

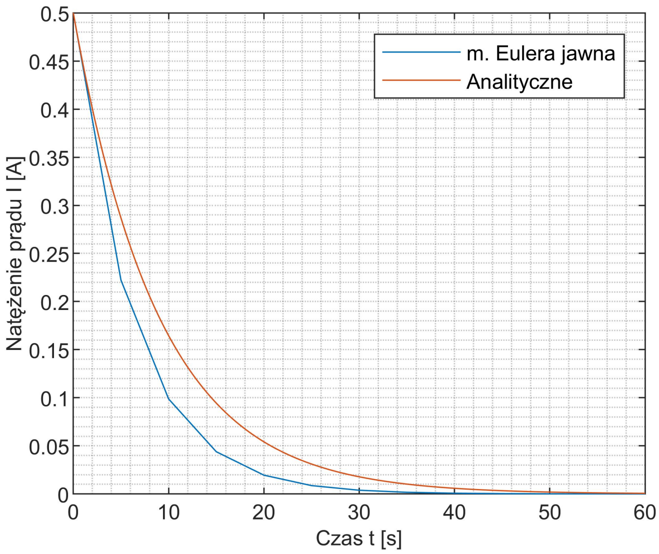
$$I = I_0 \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \tag{8}$$

Dorysuj krzywą dla rozwiązania dokładnego do otrzymanego wcześniej rozwiązania.

Jest to zwykłe rysowanie wykresu funkcji tak jak na wszystkich poprzednich zajęciach. Dlatego tutaj przedstawiam tylko zapis funkcji eksponencjalnej

```
I2=I(1)*exp(-tt/(R*C))
```

gdzie `I(1)` to wartość początkowa (w chwili zero), natomiast `tt` jest zagęszczonym wektorem czasu.




**Zadanie 3**. Wykonaj przekształcenie zależności (7) w celu wyznaczenia $I_{k+1}$ i napisz program dla niejawnej metody Eulera. Wszystkie dane takie same jak w **zadaniu 1**. Przekształcenie równania wykonaj na kartce. Dorysuj krzywą do wykresu.
Metodę zapisz w tym samym skrypcie, ale pamiętaj żeby nadać nowe symbole i nie nadpisać wyników dla metody jawnej.

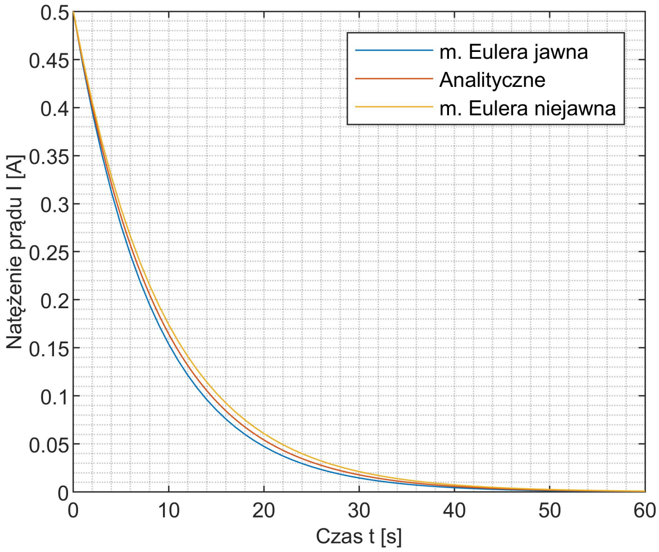
Należy przekształcić równanie ze względu na niewiadomą $I_{k+1}$ (czyli musi znajdować się po lewej stronie równania). Następnie przekształcony wzór wprowadzamy do pętli **for** i rozwiązujemy zadanie tak samo jak dla metody jawnej. Pamiętaj żeby zdefiniować nową zmienną np. `I3`. Zadanie można rozwiązywać w tej samej pętli **for** co jawną metodę Eulera.

**Zadanie 4.** Sprawdź jak będą zmieniały się rozwiązania wraz ze zmianą kroku.

- Zmniejszaj krok w względem zadanego w temacie zdania. Sprawdź rozwiązanie dla kroku $h = \{2, 1, 0.1\}$.

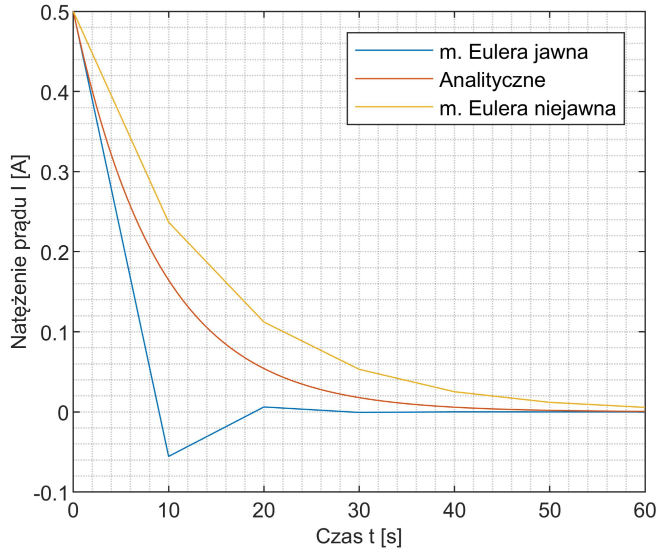
- Zwiększ krok do $h = 10$. Porównaj wyniki otrzymane dla metod Eulera jawnej i niejawnej. Czy wiesz z czego wynika ta różnica?

Przy zmniejszaniu kroku, zgodnie z oczekiwaniami, rozwiązania zarówno w metodzie jawnej jak i niejawnej zbliżają się do rozwiązania dokładnego.




Rysunek 3: Porównanie rozwiązań otrzymanych metodami Eulera dla kroku $h = 1$

Zwiększając krok do $h = 10$ otrzymamy następujące rozwiązania.




Rysunek 4: Porównanie rozwiązań otrzymanych metodami Eulera dla kroku $h = 10$

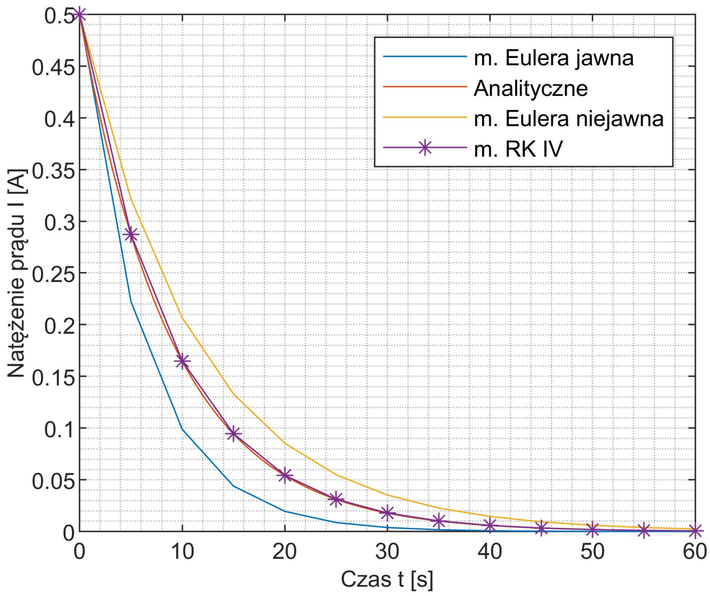
W przypadku jawnej metody Eulera można zaobserwować wyraźną utratę stabilności rozwiązania. W tym przypadku krok metody jest dłuższy niż stała czasowa ładowania kondensatora $\tau = R \cdot C = 9$ s. Natężenie prądu dla chwili $t = 10$ s przyjmuje wartość ujemną co wyraźnie odbiega od rzeczywistego charakteru zjawiska.

Z drugiej strony rozwiązanie dla niejawnej metody Eulera, pomimo wyraźnych różnic względem rozwiązania ścisłego, zachowuje monotoniczny spadek wartości oraz stabilność.

Więcej na temat stabilności w metodach Eulera można przeczytać w skrypcie [1] w rozdziale 6.2.2.

**Zadanie 5**. Rozwiąż zadanie metodą Rungego-Kutty IV rzędu, dla kroku $h = 5$. Narysuj krzywą (na tym samym wykresie co metody Eulera) i porównaj wyniki.

Student powinien samodzielnie rozwiązać zadanie.




**Zadanie 6**. Podczas ładowania kondensatora w obwodzie przedstawionym na rys. 1, zmiana napięcia na kondensatorze jest opisana równaniem różniczkowym

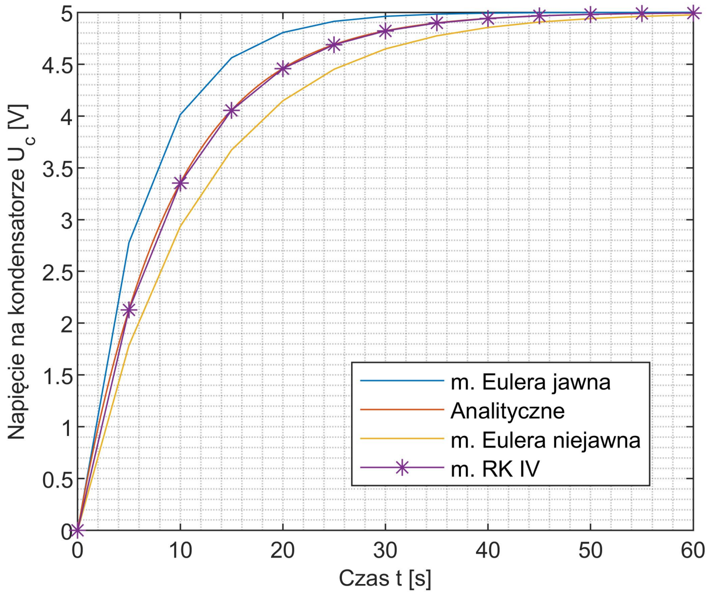
$$\frac{dU_c}{dt} = \frac{1}{RC} \cdot \left(U_z - U_c\right)$$

Obliczyć zmianę napięcia na kondensatorze $U_c$ wszystkimi poznanymi metodami obliczeniowymi, narysować wykres i porównać z rozwiązaniem analitycznym wyrażonym zależnością

$$U_c = U_z \cdot \left(1 - e^{\frac{-t}{RC}}\right)$$

Przy czym napięcie zasilania jest stałe $U_z = 5$ V, a dane takie same jak w **Przykładzie 1**. W chwili początkowej $t = 0$ napięcie na kondensatorze $U_c = 0$.

Student powinien samodzielnie rozwiązać zadanie.




**Literatura:**

[1] Czajka I., Gołaś A. *Inżynierskie metody analizy numerycznej i planowanie eksperymentu.* Wydawnictwo AGH, Kraków, 2017.