

Analiza matematyczna – zestaw nr 1

Zadanie 1 Podaj interpretację geometryczną iloczynów kartezjańskich $A \times B$ oraz $B \times A$ dla następujących zbiorów:

- a) $A = [-1, 3) \cup \{5\}$, $B = (-2, 1]$,
- b) $A = \{1, 3, 5\}$, $B = [-2, 2]$,
- c) $A = \mathbb{Z} \cap (-3, 3)$, $B = \mathbb{N} \cap [-3, 3]$.

Zadanie 2 Wykaż, że dla dowolnych zbiorów A, B, C zachodzą zależności:

- a) $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \times C \subset B \times C)$,
- b) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$,
- c) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$,
- d) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Zadanie 3 Znajdź kresy dolne i górne podanych zbiorów. Czy w tych zbiorach są elementy najmniejsze i największe?

- a) $A = \left\{ \frac{7}{10}, \frac{77}{100}, \frac{777}{1000}, \dots \right\}$,
- b) $B = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{k} - \frac{\sqrt{3}}{l} : k, l \in \mathbb{N} \right\}$,
- c) $C = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}$,
- d) $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 5|x| + 4 \leq 0\}$.

Zadanie 4 Wykazać własności obrazu i przeciwobrazu funkcji:

- a) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
- b) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
- c) $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
- d) $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$,
- e) $A \subset f^{-1}[f(A)]$ oraz $f[f^{-1}(B)] = B$.

Zadanie 5 Określ dziedziny i zbiory wartości podanych funkcji:

- a) $f(x) = \sqrt{\cos x}$, b) $g(x) = \log_4(1 + |1 - x|)$, c) $h(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + x + 6}{x^2 - 5x + 6}$.

Zadanie 6 Wykaż z definicji, że podana funkcja jest monotoniczna na wskazanym przedziale:

- a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ w zbiorze $\mathbb{R}$, b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$ w przedziale $[1, \infty)$.

Zadanie 7 Niech $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ będzie określona wzorem:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x+3}{x-3} & \text{dla } x \neq 3 \\ 2 & \text{dla } x = 3 \end{cases}.$$

Sprawdź, czy f jest suriekcją oraz czy jest różnowartościowa. Jeżeli f jest bijekcją, to wyznacz f^{-1} .

Zadanie 8 Zbadaj parzystość następujących funkcji:

a) $f(x) = \sin x + \cos x$, b) $g(x) = x^{\frac{2^x+1}{2^x-1}}$, c) $h(x) = \log \frac{x-1}{x+1}$.

Zadanie 9 Zbadaj, czy podana funkcja jest iniekcją, suriekcją, bijekcją. W przypadku bijekcji znajdź funkcję odwrotną:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, b) $g(x) = \frac{2}{x-2}$, c) $h(x) = \log_2^3(x+1)$, d) $p(x) = 3^{x-1} - 2$.

Zadanie 10 Wyznacz okresy podstawowe funkcji:

a) $f(x) = \cos(3x - 2)$, b) $g(x) = 1 - \sin 2x$, c) $h(x) = \frac{1}{\sin 3x}$.

Zadanie 11 Oblicz wartości funkcji cyklotometrycznych:

a) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$, b) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, c) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, d) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$,
e) $\arctg \sqrt{3}$, f) $\arctg(-1)$, g) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, h) $\operatorname{arcctg} \sqrt{3}$.

Zadanie 12 Naszkicuj wykres funkcji:

a) $y = \cos(\arccos x)$, b) $y = \arccos(\cos x)$, c) $y = \sin(\arccos x)$, d) $y = \arccos(\sin x)$.

Zadanie 13 Narysuj wykresy funkcji:

a) $y = \lfloor x^2 \rfloor$, b) $y = \lfloor \log_2 x \rfloor$, c) $y = x \operatorname{sgn}(x)$, d) $y = \arctg(\operatorname{sgn}(x))$,

gdzie $\lfloor x \rfloor = \max\{k \in \mathbb{Z}: k \leq x\}$ oznacza część całkowitą liczby x , zaś $\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -1 & \text{dla } x < 0 \end{cases}$.