Analiza matematyczna – zestaw nr 2

Zadanie 1 Zbadaj czy ciąg jest ograniczony (z dołu, z góry):

a) $a_n = \frac{n+3}{n^2}$ b) $a_n = \operatorname{tg} \frac{1}{n}$ c) $a_n = \frac{2+\cos n}{3-\sin n}$

Zadanie 2 Zbadaj monotoniczność ciągów:

a) $a_n = \frac{n+1}{n^2+1}$ b) $a_n = \frac{3n^2+5n-3}{n^2+2n}$ c) $a_n = \frac{n^n}{n!}$ d) $a_n = \cos \frac{n\pi}{6}$ e) $a_n = \frac{2^n}{n^2}$.

Zadanie 3 Udowodnij z definicji granicy, że:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n+7} = 1$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+n+1}}{n} = 1$ c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}} = 1$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} 2^n = \infty$.

Zadanie 4 Oblicz granice ciągów, korzystając z tw. o trzech ciągach:

a) $\sqrt[n]{3^{n+1}+2^{n-1}+2^{2n+2}}$ b) $\frac{3n^2+\cos n!}{2n^2-2\sin n^2}$ c) $\frac{(-1)^n+5n}{3+4n}$ d) $\frac{2}{n^3+1} + \frac{2}{n3+2} + \ldots + \frac{2}{n^3+n}$

Zadanie 5 Oblicz granice ciągów:

a) $\frac{1}{100} - \frac{100}{n}$ b) $\frac{3n-\frac{1}{n}}{2n+\frac{2}{n}}$ c) $\frac{3n+1}{5n-1}$ d) $\sqrt[n]{100n^2}$ e) $3n - \sqrt{9n^2+6n-15}$

f) $\frac{6n^5-2n}{2n^6+1}$ g) $\sqrt{\frac{9n^2+1}{n^2+4}}$ h) $\frac{\sqrt{n^2-1}}{\sqrt[3]{8n^3-1}}$ i) $\frac{4^{n-1}-2^{n+1}}{2^{2n}-7}$ j) $\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n-\sqrt{n}}$

k) $\frac{n^2-1}{3-n^3}$ l) $\frac{(2n-1)^3}{(4n-1)^2(1-5n)}$ ł) $\frac{3}{n} - \frac{10}{\sqrt{n}}$ m) $\frac{\sqrt{n^2+3}}{\sqrt[3]{2+27n^3}}$ n) $\frac{\sqrt{1+2n^2}-\sqrt{1+4n^2}}{n}$

o) $\sqrt{3n^2+2n-5} - n\sqrt{3}$ ó) $\sqrt[3]{n^3+4n^2} - n$ p) $\frac{3\cdot 2^{2n+2}-10}{5\cdot 4^{n-1}+3}$ q) $\frac{4^{n-1}-2^{n+1}}{2^{2n}-7}$

r) $\frac{2^{n+1}-3^{n+2}}{3^{n+3}}$ s) $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n$ t) $\left(1-\frac{3}{n+1}\right)^n$ u) $\left(\frac{n^2+6}{n^2}\right)^{n^2}$ v) $\left(\frac{5n+2}{5n-2}\right)^{\binom{n}{2}}$

w) $\frac{n}{n^2+1}\sin(3\sqrt{n+1})$ x) $\frac{1+2+\ldots+n}{n^3+1}\cos(n!)$ y) $\sqrt[3]{n^2(n+1)} - \sqrt[3]{n(n-1)^2}$

z) $\left(\frac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{2+4+6+\ldots+2n}\right)$ ź) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{(n-1)\cdot n}$ ż) $\frac{2n}{2n^2-1}\cos\frac{n+1}{2n-1} - \frac{n}{1-2n}\cdot\frac{n(-1)^n}{n^2+1}$