

Analiza matematyczna – zestaw nr 3

Zadanie 1 Korzystając z definicji Heinego oraz Cauchy’ego granicy funkcji uzasadnij podane równości:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -1} (3 + 3x + x^2) = 1, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} (2^{-x+1} - 1) = -1, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-1}{x^2-3x+2} = \infty, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt[3]{16-x^2} = 0.$$

Zadanie 2 Korzystając z definicji Heinego uzasadnij, że podane granice funkcji nie istnieją:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x}{x^2-4}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \infty} e^x(1 + \sin x), \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\operatorname{tg} x}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} x \arctg \frac{1}{x}, \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \cos(\pi - x).$$

Zadanie 3 Zbadaj, obliczając granice jednostronne, czy istnieją podane granice:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|2-x|^2}{x^2-3x+2}, \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{|2x-\pi|}, \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x+1)}{|x+1|}, \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{sgn}[x(1-x^2)].$$

Zadanie 4 Oblicz granice funkcji:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\sqrt{2}} \frac{x^3 - \sqrt{8}}{x + \sqrt{2}} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^3 - 9x^2 + 4x + 15}{-3x^2 + 10x - 3} \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{\pi}}{\pi - x}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x^2 + 9}}{\sqrt{x^2 + 16} - 4} \quad \text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x + 1}}{x} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{e - x^2} - \sqrt[3]{x^2 + e}}{\frac{1}{2}x^2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin 3x} \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\operatorname{tg} 7x} \quad \text{i) } \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{4x^2 - \pi^2}{\cos x} \quad \text{j) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}$$

$$\text{k) } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[\left(x - \frac{\pi}{2} \right) \operatorname{tg} x \right] \quad \text{l) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{1 - \sqrt{x}} \quad \text{m) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} \quad \text{n) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$\text{o) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+1}{x-3} \right)^x \quad \text{p) } \lim_{x \rightarrow \infty} (1 + 4x)^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \quad \text{q) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \quad \text{r) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin x}$$

$$\text{s) } \lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{\sqrt[3]{x} - 2} \quad \text{t) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin 2x - \cos 2x} \quad \text{u) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+7^x)}{\ln(1+6^x)} \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 4x + 2} \right)^x$$

Zadanie 5 Dobierz stałe a i b w taki sposób, aby poniższe funkcje były ciągłe w podanych punktach:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x+2|} & \text{dla } x < 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \\ \frac{\operatorname{tg} x}{ax} & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } x_0 = 0$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin ax}{\sin 2x} & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x < 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \\ x^2 + x + 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases} \quad \text{w punkcie } x_0 = 0$$

Zadanie 6 Dobrać parametry a i b w taki sposób, aby poniższe funkcje były ciągłe na $\mathbb{R}$:

$$\text{a)} \quad f(x) = \begin{cases} b + 3(x-1)^2 & \text{dla } x \leq 0 \\ x \sin ax & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{b)} \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} - a & \text{dla } x < 0 \\ b & \text{dla } x = 0 \\ \sqrt{x} \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c)} \quad f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{dla } x < -1 \\ \arcsin x + a & \text{dla } -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{e^{2x}-1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

Zadanie 7 Korzystając z twierdzenia Darboux uzasadnij, że:

- a) równanie $4^x = \frac{2}{x}$ ma w przedziale $[\frac{1}{2}, 1]$ dokładnie jedno rozwiązanie;
- b) równanie $\ln(x+1) + x = 1$ ma w przedziale $[0, 1]$ dokładnie jedno rozwiązanie;
- c) równanie $2x = \pi \sin x$ ma pierwiastek w przedziale $(\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4})$.

Zadanie 8 Zbadaj ciągłość funkcji

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x = -1 \\ \frac{x^3-1}{|x^2-1|} & \text{dla } |x| \neq 1 \\ \frac{3}{2} & \text{dla } x = 1 \end{cases}$$

W przypadku nieciągłości określ jej rodzaje.