

Analiza matematyczna – zestaw nr 4

Zadanie 1 Korzystając z definicji zbadaj, czy istnieją pochodne funkcji we wskazanych punktach:

a) $f(x) = |x - \pi|^3 \sin x$ w punkcie $x_0 = \pi$;

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{\ln|x+1|} & \text{dla } x \notin \{-2, -1, 0\} \\ 0 & \text{dla } x \in \{-2, -1, 0\} \end{cases}$ w punkcie $x_0 = -1$;

c) $h(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$ w punkcie $x_0 = 0$.

Zadanie 2 Oblicz, korzystając z definicji, pochodną $f'(x)$ funkcji:

a) $f(x) = x^3$, b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, c) $f(x) = \cos x$, d) $f(x) = \sin \frac{1}{x}$.

Zadanie 3 Zbadaj różniczkowalność funkcji $f(x)$ w punkcie $x_0 = 0$ dla:

a) $f(x) = |x(x+1)|$, b) $f(x) = |x^3|$, c) $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

Zadanie 4 Oblicz pochodne funkcji:

a) $f(x) = x^4 \sqrt{x}$, b) $f(x) = 3x^{\frac{7}{3}} - 4x^{\frac{13}{4}} + \frac{4}{7}x^{-\frac{1}{2}} + 7^{\frac{3}{2}}$, c) $f(x) = \frac{5}{\sqrt[7]{x}} - 2x^7 + \frac{3}{2\sqrt{x}}$,

d) $f(x) = \frac{5x^2+2x-6}{2x^3-5x-8}$, e) $f(x) = \frac{\sqrt[5]{x^2-1}+\cos x}{1-\sqrt{x^7-2x^4}}$, f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{(2x^7+8)^4}}$,

g) $f(x) = \frac{x \sin x}{1+\operatorname{tg} x}$, h) $f(x) = x^3 e^{3x^2} \cos \sqrt{x}$, i) $f(x) = \sqrt{\sin x + \sqrt{x^2 + 3\sqrt{x}}}$,

j) $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt{x^3 - 2} - \frac{\ln(x+2)}{\sqrt[3]{x^2+1}}$, k) $f(x) = x^3 \operatorname{arctg} x^3$, l) $f(x) = x e^{2 \sin^2 3x}$,

m) $f(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}-x}{\sqrt{x^2+1}+x}$, n) $f(x) = \log_x \ln x$, o) $f(x) = 5^{\ln 2x^3} \operatorname{arctg}(e^{x^2})$,

p) $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{\sin x}$, q) $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$, r) $f(x) = (\operatorname{arctg} x)^x$, s) $f(x) = (\ln(x^2 + 1))^{\cos^2 x}$.

Zadanie 5 Napisz równanie stycznej i normalnej do wykresu funkcji:

a) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ w punkcie $x_0 = e$;

b) $g(x) = \frac{e^x}{x+1}$ w punkcie $x_0 = 1$;

c) $h(x) = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{1+x}$ w punkcie $x_0 = 1$.

Zadanie 6 Znajdź kąty przecięcia się wykresów funkcji:

a) $f(x) = x^2$ oraz $g(x) = \sqrt{x}$;

b) $f(x) = \sin x$ oraz $g(x) = \cos x$.

Zadanie 7 Korzystając z różniczki funkcji oblicz przybliżone wartości wyrażeń:

a) $\sin 31^\circ$, b) $\arcsin(0,49)$, c) $2^{2,9999}$, d) $\ln(1,05)$, e) $\sqrt[3]{8,11}$.

Zadanie 8 Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej oblicz $(f^{-1})'(y_0)$ dla:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x^5 + 7} + x$, $y_0 = 3$, b) $f(x) = x^x$, $y_0 = 27$ c) $f(x) = 3^x + 4^x$, $y_0 = 7$.

Zadanie 9 Oblicz f' , f'' , f''' dla podanych funkcji:

a) $f(x) = 2x^4 - 3x^3 - 5x^2 + x - 2$, b) $f(x) = x^2 \sin^2 x$, c) $f(x) = (e^x + x^3) \ln x^2$.