

Analiza matematyczna – zestaw nr 7**Zadanie 1** Oblicz całki oznaczone:

$$\begin{aligned} \text{a)} \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 dx, \quad \text{b)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x \cos x dx, \quad \text{c)} \int_1^2 \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx, \quad \text{d)} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{x}{1+x^4} dx, \quad \text{e)} \int_0^{\pi} x^3 \sin x dx, \\ \text{f)} \int_{-2}^2 \operatorname{sgn}(x-x^2) dx, \quad \text{g)} \int_0^2 \sqrt{x^4-4x^2+4} dx, \quad \text{h)} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| dx, \quad \text{i)} \int_{\frac{1}{2}}^e |\ln x| dx. \end{aligned}$$

Zadanie 2 Oblicz wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

- a) $f(x) = \sin^3 x$ w przedziale $[0, \pi]$;
- b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ w przedziale $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$;
- c) $h(x) = x \sin x$ w przedziale $[0, \pi]$.

Zadanie 3 Oblicz pole obszaru zawartego pomiędzy krzywymi:

- a) $y^2 = x$ oraz $x^2 = 8y$;
- b) $y = 2x^3$ oraz $y^2 = 4x$;
- c) $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ oraz $y = 3x$;
- d) $xy = 4$ oraz $x + y = 5$;
- e) $(x-6)^2 + y^2 = 36$ oraz $y^2 = 6x$;
- f) $y = x \sin 4x$, $x = \frac{1}{8}\pi$ oraz odcinkiem osi OX w przedziale $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$;
- g) $y = x \cos \frac{1}{3}x$, $x = \frac{1}{2}\pi$, $x = \pi$ oraz odcinkiem osi OX w przedziale $\frac{1}{2}\pi \leq x \leq \pi$.

Zadanie 4 Oblicz długość krzywych:

- a) $9y^2 = 2x^3$ dla $0 \leq x \leq 2$;
- b) $y = 2\sqrt{x}$ pomiędzy punktami $A(1, 2)$ i $B(9, 6)$;
- c) paraboli półsześciennej (paraboli Neila) $y = \frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}}$ w przedziale $1 \leq x \leq 4$;
- d) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$ w przedziale $-1 \leq x \leq 1$;
- e) $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ w przedziale $1 \leq y \leq 2$;
- f) łuku kardiody $r = a(1 + \cos \theta)$, $a > 0$, w przedziale $0 \leq \theta \leq \pi$;
- g) łuku spirali hiperbolicznej $r = \frac{a}{\theta}$, $a > 0$, w przedziale $\frac{2}{3} \leq \theta \leq \frac{3}{4}$;

Zadanie 5 Oblicz objętość bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox :

- a) linii $xy^2 = 1$ oraz ograniczonej płaszczyznami $x = 1$ oraz $x = 3$;
- b) linii $y^2(x - 4) = x(x - 3)$ dla $0 \leq x \leq 3$;
- c) paraboli $2y^2 - x = 1$ wraz z rzędną końcową $x = 4$;
- d) cisoidy Dioklesa $x^3 = y^2(2r - x)$, gdzie $r > 0$ oraz $1 \leq x \leq 2$.

Zadanie 6 Obliczyć pole powierzchni bryły powstałej przez obrót dookoła osi Ox :

- a) hiperboli $x^2 - y^2 = a^2$, gdzie $a > 0$ oraz $a \leq x \leq a\sqrt{2}$;
- b) krzywej $y = \sqrt{2rx - x^2}$ dla $r > 0$ oraz $0 \leq x \leq 2$;
- c) elipsy $4x^2 + 9y^2 = 36$;
- d) cisoidy Dioklesa $x^3 = y^2(2r - x)$, gdzie $r > 0$ oraz $1 \leq x \leq 2$.

Zadanie 7 Zbadać zbieżność całek:

- a) $\int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2 + 4}$, b) $\int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{3x + 5}}$, c) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}$, d) $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^3} dx$,
- e) $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^4}}$, f) $\int_0^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \frac{x dx}{\sqrt{4 - 9x^4}}$, g) $\int_{-2}^0 \frac{1}{(2 - x)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{2 - x}{2 + x}} dx$, h) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x dx$,
- i) $\int_0^{\pi} \frac{\cos^2 x dx}{\sqrt[3]{x - \pi}}$, j) $\int_0^1 \frac{e^{2x} - 1}{\sqrt[3]{x^4}} dx$, k) $\int_0^1 \frac{dx}{\arcsin x}$, l) $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x - \sin x}$.