

Analiza matematyczna – zestaw nr 9

Zadanie 1 Rozwiąż równania różniczkowe o zmiennych rozdzielonych:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & yy' = \frac{1-2x}{y}, & \text{b)} & y' = 10^{x+y}, & \text{c)} & y' + \sin \frac{x+y}{2} = \sin \frac{x-y}{2}, & \text{d)} & y' = \frac{x}{\ln y}, \\ \text{e)} & y' = (2-x)y, & \text{f)} & y' = \sqrt{\frac{y}{x}}, & \text{g)} & y' = -\frac{y}{x}, & \text{h)} & e^y (1+x^2) y' = x(1+e^y). \end{array}$$

Zadanie 2 Rozwiąż równania różniczkowe liniowe rzędu pierwszego:

$$\text{a)} \quad y' + \frac{y}{x} = 2 \cos^2 x, \quad \text{b)} \quad y' + \frac{y}{x^2} = \sin^2 x e^{\frac{1}{x}}, \quad \text{c)} \quad y' = -y + x^2, \quad \text{d)} \quad xy' + (1-x)y = xe^x.$$

Zadanie 3 Rozwiąż równania różniczkowe sprowadzając je do równań o zmiennych rozdzielonych:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y' = \frac{y^2}{x^2} - 2, & \text{b)} & y' = \frac{y^2 - 2xy - x^2}{y^2 + 2xy - x^2}, & \text{c)} & y' - \operatorname{tg} xy + y^2 \cos x = 0, & \text{d)} & xy' - 4y + x^2 \sqrt{y}, \\ \text{e)} & y' = \frac{1-2x}{x^2} y + 1, & \text{f)} & y' = \frac{1}{2x+y} + 2x + y - 2, & \text{g)} & y' = \frac{1-3x-3y}{1+x+y}, & \text{h)} & y' = \frac{2xy}{x^2 - y^2}, \\ \text{i)} & y' = (x+y)^2, & \text{j)} & xy' = y \ln \frac{y}{x}, & \text{k)} & 3xy' - y = 3xy^4 \ln x & \text{l)} & xy' + xy^2 = y. \end{array}$$

Zadanie 4 Rozwiąż problem Cauchy'ego:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad y' \sin x = y \ln y \text{ z warunkiem początkowym } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ \text{b)} \quad y' = y + e^{2x} \text{ z warunkiem początkowym } y(0) = 2, \\ \text{c)} \quad xy' - y = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ z warunkiem początkowym } y(1) = 0, \\ \text{d)} \quad 2y' \cos x = y \sin x - y^3 \text{ z warunkiem początkowym } y(0) = 1. \end{array}$$

Zadanie 5 Rozwiąż równania:

$$\begin{array}{llll} \text{a)} & y'' - 2y' + 6y = 0, & \text{b)} & y'' - 6y' + 9y = 0, & \text{c)} & y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}, & \text{d)} & y'' + y + \operatorname{ctg}^2 x = 0, \\ \text{e)} & y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, & \text{f)} & y'' + y = 2 \sin x - \cos x, & \text{g)} & y'' - 3y' + 2y = xe^{3x}, & \text{h)} & 2y'' - 5y' - 7y = e^{2x} + \sin x. \end{array}$$

Zadanie 6 Rozwiąż problem Cauchy'ego:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad y'' - 5y' + 4y = 0 \text{ z warunkami początkowymi } y(0) = 5, y'(0) = 8, \\ \text{b)} \quad y'' - 4y' + 3y = e^{2x} \sin x \text{ z warunkami początkowymi } y(0) = y'(0) = 0. \end{array}$$