PŁASZCZYZNA:

- równanie **normalne** płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze normalnym $\overline{n} = [A, B, C]$:
$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$
- równanie **ogólne** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze normalnym $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$:
$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0, \text{ gdzie } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0.$$
- równanie **odcinkowe** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze normalnym $\overrightarrow{n} = [A, B, C]$ (dla $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \neq 0$):
$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \text{ gdzie } a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$$
- równanie **parametryczne** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ rozpiętej przez wektory $\overrightarrow{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$:
$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 + su_1 \\ y = y_0 + tv_2 + su_2 \\ z = z_0 + tv_3 + su_3 \end{cases} \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

PROSTA:

- równanie **parametryczne** prostej l przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$:
$$l : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad , t \in \mathbb{R}.$$
- równanie **kierunkowe** prostej l przechodzącej przez punkt $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ (dla $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):
$$l : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$
- równanie **krawędziowe** prostej l będącej częścią wspólną płaszczyzn $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:
$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

KĄT MIĘDZY WEKTORAMI $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$:

- miara kąta między wektorami: $\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{u} \circ \overrightarrow{v}}{||\overrightarrow{u}|| \cdot ||\overrightarrow{v}||}$, gdzie $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) \in [0, \pi]$.
- $\overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \varphi \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ liniowo zależne.
- miara kąta między prostą a płaszczyzną:
$$\frac{||v \times u||}{||v|| \cdot ||u||} = \sin\alpha.$$

ILOCZYN WEKTOROWY I MIESZANY - własności:

- $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ liniowo zależne $\Leftrightarrow \overrightarrow{u} \parallel \overrightarrow{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = 0$.
- $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$ liniowo zależne $\Leftrightarrow (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = 0$.
- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u})$, $(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = -(\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{u}) \circ \overrightarrow{w}$.
- $\overrightarrow{\alpha u} \times \overrightarrow{v} = \alpha(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v})$, $(\overrightarrow{\alpha u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w} = \alpha\left((\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}\right)$

POLA I OBJĘTOŚCI:

- **Pole równoległoboku** rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$:
$$P_{\square} = ||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||$$
- **Pole trójkąta** rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$:
$$P_{\triangle} = \frac{1}{2}||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||$$
- **Objętość równoległościanu** rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$:
$$Obj = |(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}|.$$
- **Objętość czworościanu** rozpiętego na wektorach $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}$:
$$Obj = \frac{1}{6}|(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \circ \overrightarrow{w}|.$$

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH I PŁASZCZYZNY W PRZESTRZENI:

- Płaszczyzny π_1, π_2 o wektorach normalnych odpowiednio $\overrightarrow{n}_1, \overrightarrow{n}_2$ są równoległe $\Leftrightarrow \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 = 0$. W szczególności gdy $\overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2 \neq 0$ to π_1, π_2 nie są równoległe i wektor $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{n}_1 \times \overrightarrow{n}_2$ jest wektorem kierunkowym prostej l będącej częścią wspólną π_1, π_2.
- Płaszczyzna prostopadła do prostej l przecinająca prostą w punkcie $P = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze kierunkowym $\overrightarrow{v} = [v_1, v_2, v_3]$ ma równanie ogólne $v_1x + v_2y + v_3z + D = 0$, gdzie współczynnik D wyliczamy w zależności od współrzędnych punktu P.

ODLEGŁOŚĆ:

- **punktu od prostej:** $d(P_0, l) = \frac{||\overrightarrow{PP_0} \times v||}{||v||}$,
gdzie $P_0 \in l$ jest dowolnym punktem prostej l, a $\overrightarrow{v}$ jest wektorem kierunkowym tej prostej.
- **punktu od płaszczyzny:** $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,
- **prostej od płaszczyzny:** jest równa odległości dowolnego punktu z prostej od tej płaszczyzny.
- **prostych równoległych:** $d(l_1, l_2) = \frac{||\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{v}||}{||\overrightarrow{v}||}$,
gdzie $P_1 \in l_1$, $P_2 \in l_2$ są dowolnymi punktami z odpowiednich prostych, a $\overrightarrow{v}$ jest wektorem kierunkowym.
- **prostych skośnych:** $d(l_1, l_2) = \frac{|(\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}) \circ \overrightarrow{P_1P_2}|}{||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||}$
gdzie $P_1 \in l_1, P_2 \in l_2$ są dowolnymi punktami z odpowiednich prostych, a $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ ich wektorami kierunkowymi.
- **płaszczyzn równoległych:** $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1-D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$,