

Oznaczenia:

l - prosta o wektorze kierunkowym $v \in \overline{\mathbb{R}^3}$

π - płaszczyzna o wektorze kierunkowym $n = [A, B, C] \in \overline{\mathbb{R}^3}$

PŁASZCZYZNA:

- **równanie normalne** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze normalnym $n = [A, B, C]$:

$$\pi : A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

- **równanie ogólne** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze normalnym $n = [A, B, C]$:

$$\pi : Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0, \text{ gdzie } D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$$

- **równanie odcinkowe** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze normalnym $n = [A, B, C]$ ($D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0 \neq 0$):

$$\pi : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ gdzie } a = -\frac{D}{A}, b = -\frac{D}{B}, c = -\frac{D}{C}$$

- **równanie parametryczne** płaszczyzny π przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ rozpiętej przez wektory $u = [u_1, u_2, u_3]$, $v = [v_1, v_2, v_3]$:

$$\pi : \begin{cases} x = x_0 + su_1 + tv_1 \\ y = y_0 + su_2 + tv_2 \\ z = z_0 + su_3 + tv_3 \end{cases} \quad , \quad s, t \in \mathbb{R}$$

PROSTA:

- **równanie parametryczne** prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze kierunkowym $v = [v_1, v_2, v_3]$:

$$l : \begin{cases} x = x_0 + tv_1 \\ y = y_0 + tv_2 \\ z = z_0 + tv_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- **równanie kierunkowe** prostej l przechodzącej przez punkt $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ o wektorze kierunkowym $v = [v_1, v_2, v_3]$ ($v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$):

$$l : \frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}$$

- **równanie krawędziowe** prostej l będącej częścią wspólną płaszczyzn $\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ oraz $\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$:

$$l : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

KĄT MIĘDZY WEKTORAMI:

założenia: $u, v \in \overline{\mathbb{R}^3} \setminus \{\vec{0}\}$, $\angle(u, v) \in [0, \pi]$

- miara kąta między niezerowymi wektorami:

$$\cos(\angle(u, v)) = \frac{u \circ v}{||u|| \cdot ||v||}$$

- $u \parallel v \Leftrightarrow \angle(u, v) \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow u, v$ liniowo zależne,

- $u \perp v \Leftrightarrow u \circ v = 0$

ILOCZYN WEKTOROWY I MIESZANY:

1. u, v liniowo zależne $\Leftrightarrow u \times v = \vec{0}$
2. u, v, w liniowo zależne $\Leftrightarrow (u \times v) \circ w = 0$

POLA I OBJĘTOŚCI:

- **pole równoległoboku** rozpiętego przez wektory u, v :

$$P_{\square} = ||u \times v||$$

- **pole trójkąta** rozpiętego przez wektory u, v :

$$P_{\triangle} = \frac{1}{2} ||u \times v||$$

- **objętość równoległościanu** rozpiętego przez wektory u, v, w :

$$V = |(u \times v) \circ w|$$

- **objętość czworościanu** rozpiętego przez wektory u, v, w :

$$V = \frac{1}{6} |(u \times v) \circ w|$$

WZAJEMNE POŁOŻENIE PROSTYCH I PŁASZCZYZN W PRZESTRZENI

- płaszczyzny π_1, π_2 o wektorach normalnych n_1, n_2 są równoległe $\Leftrightarrow n_1 \times n_2 = \vec{0}$,
- jeśli płaszczyzny π_1, π_2 o wektorach normalnych n_1, n_2 nie są równoległe, to wektor $v = n_1 \times n_2$ jest wektorem kierunkowym prostej będącej częścią wspólną tych płaszczyzn,
- jeśli płaszczyzna π jest prostopadła do prostej l , to wektor kierunkowy prostej oraz wektor normalny płaszczyzny są liniowo zależne,

ODLEGŁOŚĆ W PRZESTRZENI:

- **punktu od prostej**, gdzie v jest wektorem kierunkowym prostej l , a P jest dowolnym punktem z tej prostej:

$$d(P_0, l) = \frac{||\overrightarrow{PP_0} \times v||}{||v||}$$

- **punktu od płaszczyzny**, gdzie $[A, B, C]$ jest wektorem normalnym płaszczyzny π , $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$:

$$d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

- **prostej od płaszczyzny** (dla prostej równoległej do płaszczyzny) jest równa odległości dowolnego punktu z tej prostej od płaszczyzny,
- **prostych równoległych** l_1, l_2 jest równa odległości dowolnego punktu z prostej l_1 od prostej l_2 ,
- **prostych skośnych** l_1, l_2 o wektorach kierunkowych v_1, v_2 , gdzie $P_1 \in l_1, P_2 \in l_2$:

$$d(l_1, l_2) = \frac{||(\overrightarrow{v_1 \times v_2}) \circ \overrightarrow{P_1 P_2}||}{||v_1 \times v_2||}$$

- **płaszczyzn równoległych**:

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$