

Zadanie 1. Znajdź $U_1 + U_2$, jeśli:

a) $U_1 = \text{lin}\{(1, 1, -1, -1), (-2, -1, 0, 2)\}$, $U_2 = \text{lin}\{(2, 2, -1, 0), (-1, -2, -3, -4)\}$,

b) $U_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2y - z = 0\}$, $U_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 0, x + z = 0\}$.

Zadanie 2. Rozłóż przestrzeń $V = \mathbb{R}[x]_3$ na sumę podprzestrzeni $U \oplus W$ tak, aby:

$$U = \text{lin}\{x^3 - 2x, -x^2 + x - 1\}.$$

Zadanie 3. Sprawdź, czy $(U_1 + \dots + U_k) \cap V = (U_1 \cap V) + \dots + (U_k \cap V)$.

Zadanie 4. Niech $V = U \oplus W$ i $\dim V = n$. Ponadto dane są niezerowe wektory $u_1, \dots, u_k \in U$ oraz $w_1, \dots, w_l \in W$. Wykaż, że:

$$(u_1, \dots, u_k, w_1, \dots, w_l) \text{ jest bazą } U \oplus W \Leftrightarrow (u_1, \dots, u_k) \text{ jest bazą } U \text{ oraz } (w_1, \dots, w_l) \text{ jest bazą } W.$$

Zadanie 5. Niech $U_1 = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 3x - 2y + z + 4t = 0\}$, $U_2 = \text{lin}\{(1, 1, 1, 1), (2, 0, -1, 3)\}$. Uzasadnij, że $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4$, ale $U_1 \oplus U_2 \neq \mathbb{R}^4$. Zmodyfikuj przestrzeń U_1 dołączając do niej kolejny warunek tak, żeby otrzymana przestrzeń U'_1 spełniała warunek $U'_1 \oplus U_2 = \mathbb{R}^4$.