1) Układem n równań liniowch z m niewiadomymi nazywamy układ równań:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

gdzie $\forall i,j: \; a_{ij} \in \mathbb{K}$ to współczynniki (dane, ustalone), $\forall i \in \{1,\ldots,n\}: \; b_i \in \mathbb{K}$ to wyrazy wolne (dane, ustalone), $\forall j \in \{1,\ldots,m\}: \; x_j$ to niewiadome (szukane). Rozwiązaniem takiego układu $(*)$ nazywamy każdą m-kę skalarów $(x_1,\ldots,x_m) \in \mathbb{K}^m$, która spełnia wszystkie równania układu $(*)$.

2) Macierz $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$ nazywamy macierzą współczynników układu $(*)$, zaś macierz $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times 1}(\mathbb{K})$ kolumną wyrazów wolnych układu $(*)$. Natomiast macierz

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right] \in \mathbf{M}_{n\times(m+1)}(\mathbb{K})$$

nazywamy macierzą uzupełnioną układu $(*)$.

3) Układ $(*)$ nazywamy **układem Cramera** jeżeli jest układem kwadratowym, tzn. $n = m$ oraz $\det A \neq 0$. Jeżeli układ $(*)$ $A \cdot X = B$ jest układem Cramera, to jest oznaczony oraz jedyne jego rozwiązanie zadane jest poprzez tzw. wzory Cramera:

$$\forall j \in \{1,\ldots,n\}: \quad x_j = (\det A)^{-1} \cdot \det A_{x_j},$$

gdzie A_{x_j} powstaje z A przez zastąpienie j-tej kolumny kolumną wyrazów wolnych B.

4) Układ $(*)$ posiada co najmniej 1 rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy $r(A) = r([A|B])$.

5) Układ $(*)$ jest sprzeczny $\Leftrightarrow r(A) \neq r([A|B])$, a tak naprawdę $r(A) < r([A|B])$.

6) Jeśli $r(A) = r([A|B]) = r = m =$ ilość niewiadomych (ilość kolumn w A), to układ $(*)$ jest oznaczony.

7) Jeśli $r(A) = r([A|B]) = r < m$, to układ $(*)$ jest układem nieoznaczonym i jego rozwiązania zależą od $(m - r)$ parametrów.

8) Układy jednorodne, tzn. takie, dla których $B = \overline{0}$, są zawsze niesprzeczne, a gdy są oznaczone, to jedynym rozwiązaniem jest $(\mathbf{0},\ldots,\mathbf{0})$.

9) **Uwaga!** Gdy w układzie kwadratowym $\det A = 0$ oraz $\forall x_i: \; \det A_{x_i} = 0$, to układ może być nieoznaczony lub sprzeczny.

Zadanie 1. W zależności od wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ wyznacz rząd macierzy:

a) $\begin{bmatrix} p-1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & p+1 \\ p & p & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 1-p & 2 & p+1 & -2 \\ p+1 & -1 & -2 & 2 \\ 1 & p+1 & 4 & -2 \\ 3 & 4 & p+3 & -2 \end{bmatrix}$, c) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & p-1 & 1 & 1 \\ p & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & p-3 \\ 1 & p & 3 & -1 & -4 \end{bmatrix}$,

Zadanie 2. Rozwiąż układy równań:

a) $\begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=1 \\ -x-4y-3z=-3, \end{cases}$ b) $\begin{cases} -3x-3y+2z=2 \\ x-4y-3z=-4 \\ -2x+2y+4z=-8, \end{cases}$ c) $\begin{cases} -2x-3y+z=1 \\ -4x-6y+2z=3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x-y+z=-1 \\ z+2y-3z-t=-1 \\ 3y+z-2t=-1 \\ -x-y+z+t=-1, \end{cases}$ e) $\begin{cases} 2x-y+z-t=2 \\ -x+y+z-3t=-13 \\ -2x+3y+z+2t=3, \end{cases}$ f) $\begin{cases} -3x+2y-z+4t=-5 \\ -x-3y-2z-t=-2 \\ x+y+z=2 \\ -x-2y-3z+4t=1. \end{cases}$

g) $\begin{cases} 2x-3y-5z=5 \\ -x+y-z=-5 \\ -3x-4y-3z=-1 \end{cases}$ h) $\begin{cases} 2x-y-3z+4t=-5 \\ -3x-2y-z-t=-2 \\ -x+y+2z-3t=3 \\ x+y+z=2 \\ -2x-3y-z+4t=0 \end{cases}$ i) $\begin{cases} 2x+y-z+2t-u=3 \\ 2x-y+z-2u=4 \\ 3x-2y+2z+t-3u=5 \\ -3x-3t+2u=-4 \end{cases}$

Zadanie 3. Zbadaj istnienie rozwiązania układów ze względu na parametry. Jeśli rozwiązanie istnieje, wyznacz je.

a) $\begin{cases} x+ky-z=1 \\ x+y+kz=2 \\ kx+y+z=3, \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ (k+1)x+y+z=1 \\ 2x+(k-1)y+z=k-1, \end{cases}$ c) $\begin{cases} ax+y+2z=-a \\ -x+y+2z=b \\ 2x+y+(a-1)z=a+3, \end{cases}$

d) $\begin{cases} px+y+z=4 \\ x+qy+z=3 \\ x+_2(q-1)y+z=4, \end{cases}$ e) $\begin{cases} x+y+z+at=a^3 \\ x+y+az+t=a^2 \\ x+ay+z+t=a \\ ax+y+z+t=1, \end{cases}$ f) $\begin{cases} m^2x-2y+z=m \\ x-2y+2mz=1, \end{cases}$

g) $\begin{cases} x+ky-z=1 \\ x+y+kz=2 \\ kx+y+z=l, \end{cases}$ h) $\begin{cases} (k-1)x-y+(2-k)z=k+1 \\ mx+(m-1)y-2z=m \\ -y+kz=-k, \end{cases}$