

Zadanie 1. W zależności od parametrów k i m rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} 3x + y + z = 1 \\ x + ky + z = k \\ x + y + kz = m \end{cases}$$

Zadanie 2. Dla jakich wartości parametrów rzeczywistych k oraz m wektor $v = (k + 1, m, -k)$ da się wygenerować za pomocą wektorów $w_1 = (k - 1, -1, 2 - k)$, $w_2 = (m, m - 1, -2)$, $w_3 = (0, -1, k)$? Dla jakich k i m można to zrobić w sposób jednoznaczny?

Zadanie 3. Rozwiąż układ równań w zależności od wartości parametru p :

$$\begin{cases} (2 + p)x + 2py + z = 2p \\ (3 + p)x + p^2y + z = -p \\ x + py + (1 - p)z = p \\ (1 - p)x - p^2y - z = p \end{cases}$$

Uzasadnij dla jakich wartości parametru $p \in \mathbb{R}$ zachodzi zależność

$$(2p, -p, p, p) \in \text{lin} \left\{ (2 + p, 3 + p, 1, 1 - p); (2p, p^2, p, -p^2); (1, 1, 1 - p, -1) \right\}.$$

Zadanie 4. Określ w zależności od $p, k \in \mathbb{R}$ rząd macierzy uzupełnionej układu:

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 = p \\ -2x_1 - 3x_2 + px_3 = k \\ -4x_1 - x_2 - 3x_3 = -2 \end{cases}.$$

Wykorzystując tę wiedzę zbadaj liczbę rozwiązań układu w zależności od $p, k \in \mathbb{R}$. W przypadku, gdy układ jest oznaczony, wyznacz rozwiązanie stosując wzory Cramera. Uzasadnij dla jakich wartości parametru p zachodzi równość

$$\text{lin}\{(2, 2, -2, -4), (2, 2, -3, -1), (0, 0, p, -3)\} = \text{lin}\{(2, 2, -2, -4), (2, 2, -3, -1), (0, 0, p, -3), (2, p, -2, -2)\}.$$