1) **Liczbą zespoloną** nazywamy uporządkowaną parę liczb rzeczywistych $z = (x, y)$, gdzie $x = \operatorname{Re} z$ to część rzeczywista liczby z, zaś $y = \operatorname{Im} z$ to część urojona liczby z. Liczbę zespoloną $i = (0, 1)$ nazywamy jednostką urojoną. Ponadto $i^2 = -1$.

2) Dodawanie i mnożenie liczb zespolonych są działaniami łącznymi i przemiennymi. Dodatkowo mnożenie jest rozdzielne względem dodawania.

3) Liczbę $z = (x, y) = x + yi$ nazywamy **postacią algebraiczną** liczby zespolonej z. Definiujemy też liczby $-z = (-x, -y) = -x - yi$ przeciwną do z oraz $\overline{z} = (x, -y) = x - yi$ sprzężoną do z.

4) Niech $z = x + yi$. Liczbę $|z| := \sqrt{x^2 + y^2}$ nazywamy **modułem** liczby zespolonej i jest to odległość liczby z od $(0, 0)$. Liczba $|z_1 - z_2|$ wyraża odległość liczb z_1, z_2 na płaszczyźnie zespolonej.

5) Własności liczb zespolonych:

   a) $\overline{(\overline{z})} = z$

   b) $z \cdot \overline{z} = |z|^2$

   c) $|\overline{z}| = |z|$

   d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

   e) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

   f) Jeśli $z_2 \neq 0$, to $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \left(\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}\right)$

   g) $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$

   h) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

   i) Jeśli $z_2 \neq 0$, to $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

   j) $|z^n| = |z|^n$

6) Każdą liczbę rzeczywistą φ spełniającą układ $\begin{cases} \cos\varphi &= \frac{x}{|z|} \\ \sin\varphi &= \frac{y}{|z|} \end{cases}$ nazywamy **argumentem** liczby zespolonej $z = (x, y) \neq (0, 0)$ i oznaczamy $\operatorname{Arg} z = \varphi$. Dla $z = (0, 0)$ dowolna liczba rzeczywista jest jej argumentem. **Argumentem głównym** liczby zespolonej $z \neq 0$ nazywamy ten argument, który należy do przedziału $\langle 0, 2\pi)$ i oznaczamy $\arg z$. Co więcej $\arg(0) := 0$.

7) Jeżeli $z \in \mathbb{C}$ oraz $\varphi = \operatorname{Arg} z$, to postać $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ nazywamy postacią **trygonometryczną** liczby zespolonej z.

8) Jeżeli $z \in \mathbb{C}$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$ oraz $|z| = r$, to postać $z = re^{i\varphi}$ nazywamy postacią **wykładniczą** liczby zespolonej z.

Zadanie 1. Wykonaj działania:

a) $(3+7i)(-2+i)$,

b) $\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}i\right)^2$,

c) $(1+i)(1-i)(-1+i)(-1-i)$,

d) $\frac{z-w}{z+w}$ dla $z=4-3i$ oraz $w = -1 + 2i$.

Zadanie 2. Znajdź liczby rzeczywiste x, y spełniające równania:

a) $x(2+3i)+y(5-2i)=-8+7i$,

b) $\frac{1+yi}{x-2i}=3i-1$,

c) $\frac{x+yi}{x-yi}=\frac{9-2i}{9+2i}$,

d) $\frac{y+(x-2)i}{1-yi}=\frac{(y+1)i-x}{2+i}$.

Zadanie 3. Wyznacz:

a) $\operatorname{Im}\left[\frac{\overline{(1-6i)\cdot(i^3-1)}}{(2-5i)^2}\right]$,

b) $\frac{\overline{3-2i}}{(\overline{-1+2i})^2(3+i)}$,

c) $\operatorname{Re}[(2-i)^3-(1-i^7)]$,

Zadanie 4. Niech $w=\frac{z+i}{(2-i)z}$. Narysuj zbiór wszystkich liczb zespolonych z, dla których:

1. liczba w jest rzeczywista,
2. liczba w jest czysto urojona ($\operatorname{Re} w = 0$),
3. $\operatorname{Re} w > \operatorname{Im} w$,
4. $\operatorname{Re} w \leqslant \operatorname{Im} w$.

Zadanie 5. Rozwiąż poniższe układy w zbiorze liczb zespolonych:

a) $\begin{cases} (1+i)z - iw = i-4 \\ (-2i+3)z+(2+i)w = 11+9i \end{cases}$,

b) $\begin{cases} (3+i)z+(1+i)w = 5+i \\ (i-4)z-(2+3i)w = -4-3i \end{cases}$.

Zadanie 6. Przedstaw w postaci trygonometrycznej następujące liczby:

a) $z=-\sqrt{3}-i$,

b) $z=-3i-3$,

c) $z=\sin\alpha - i\cos\alpha, \alpha\in\mathbb{R}$,

d) $z=\overline{(\sqrt{3}-i)2i}$.

Zadanie 7. Przedstaw w postaci wykładniczej następujące liczby:

a) $z=\frac{4-4i}{\sqrt{3}+i}$,

b) $z=\left(\frac{i}{i-1}\right)^{23}$,