1) Niech $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Wówczas zachodzą następujące zależności:

   a) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi$ dla $k \in \mathbb{Z}$

   b) $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$ dla $z_2 \neq 0$ oraz $k \in \mathbb{Z}$

   c) $\arg(z^n) = n \cdot \arg z + 2k\pi$ dla $n \in \mathbb{N}$ oraz $k \in \mathbb{Z}$.

2) Jeśli $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $n \in \mathbb{N}_+$, to $z^n = |z|^n\big(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi)\big)$.

3) Niech $z = re^{i\varphi}$, $z_1 = r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2e^{i\varphi_2}$, gdzie $r, r_1, r_2 \geqslant 0$, $\varphi, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}$. Wówczas:

   a) $\overline{z} = re^{-i\varphi}$

   b) $-z = re^{i(\varphi+\pi)}$

   c) $\frac{1}{z} = \frac{1}{r}e^{-i\varphi}$

   d) $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

   e) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

   f) $z^k = r^ke^{ik\varphi}$

4) Niech $n \in \mathbb{N}_+$. **Pierwiastkiem** stopnia n z liczby zespolonej z nazywamy każdą taką liczbę $w \in \mathbb{C}$, że $w^n = z$. Dla dowolnej liczby $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) \neq 0$ istnieje dokładnie n różnych pierwiatków zespolonych n-tego stopnia z liczby z. Zatem $\sqrt[n]{z} = \{w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, gdzie

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right), \; k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

5) Jeśli $w_k \in \sqrt[n]{z}$, to $w_{k+1} = w_k \cdot \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right) \in \sqrt[n]{z}$.

6) **Wielomianem zespolonym** stopnia n nazywamy funkcję $w\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ taką, że

$$w(z) = a_nz^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1z + a_0, \text{ gdzie } \forall i \in \{0, 1, \ldots, n\} \; a_i \in \mathbb{C}, \; a_n \neq 0.$$

7) **Pierwiastkiem wielomianu** w nazywamy taką liczbę $z_0 \in \mathbb{C}$, że $w(z_0) = 0$.

8) Każdy wielomian zespolony $w(z) = a_nz^n + \ldots + a_1z + a_0$ stopnia $n \in \mathbb{N}_+$ ma dokładnie n pierwiastków zespolonych (licząc z krotnościami), zatem jeśli $z_1, \ldots, z_t \in \mathbb{C}$ są różnymi pierwiastkami $w(z)$ o krotnościach odpowiednio $k_1, \ldots, k_t$, to $k_1+k_2+\ldots+k_t = n$ oraz $w(z) = a_n\,(z - z_1)^{k_1}\cdot(z - z_2)^{k_2}\cdot\ldots\cdot(z - z_t)^{k_t}$ (każdy wielomian zespolony jest iloczynem wielomianów stopnia pierwszego).

9) Niech $w(z) = a_nz^n + \ldots + a_1z + a_0, \forall i \; a_i \in \mathbb{R}, \; a_n \neq 0$. Wówczas $z_0 \in \mathbb{C}$ jest pierwiastkiem k-krotnym wielomianu $w(z)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $\overline{z_0}$ jest pierwiastkiem k-krotnym tego wielomianu.

10) Pierwiastki trójmianu zespolonego $w(z) = az^2 + bz + c, \; a \neq 0, \; a, b, c \in \mathbb{C}$ wyrażone są wzorami:

$$z_1 = \frac{-b + w_1}{2a} \qquad \vee \qquad z_2 = \frac{-b + w_2}{2a}$$

gdzie $\sqrt{\Delta} = \sqrt{b^2 - 4ac} = \{w_1, w_2\}$.

Zadanie 1. Zaznacz poniższe zbiory na płaszczyźnie zespolonej:

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| \leqslant \operatorname{Im} z + 2\}$,

b) $A = \{z \in \mathbb{C} : \frac{\pi}{4} < \arg\left(\frac{z+i}{z-i}\right) \leqslant \frac{\pi}{2}\}$,

c) $A = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z+i}{z^2+1}\right| \geqslant \frac{1}{2} \wedge \frac{\pi}{6} \leqslant \arg[z^2(2-2i)] < \frac{2\pi}{3}\}$,

d) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}\left[\frac{4-i}{-\overline{z}}\right] \geqslant 1 \wedge \frac{5\pi}{6} \leqslant \arg\left(\frac{z^3 i}{i-1}\right) \leqslant \frac{4\pi}{3}\}$,

e) $A = \{z \in \mathbb{C} : \arg\left(\frac{z^6}{2i}\right) = \pi\}$

Zadanie 2. Oblicz:

a) $(4+4i)^{100}$, b) $(\cos\frac{2\pi}{5} - i\sin\frac{2\pi}{5})^{15}$, c) $\left(\frac{6-6i}{\sqrt{2}i}\right)^{50}$,

d) $\sqrt{-7+24i}$, e) $\sqrt[3]{-8i}$, f) $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{i-1}}$,

Zadanie 3. Odgadując jeden z pierwiastków oblicz pozostałe:

a) $\sqrt[4]{(5-4i)^8}$, b) $\sqrt[5]{i}$, c) $\sqrt{-2i}$.

Zadanie 4. Korzystając z wzorów de Moivre'a wyraź $\sin 3x$ oraz $\cos 3x$ przez funkcje $\sin x$, $\cos x$.

Zadanie 5. Rozwiąż równania:

a) $z^2 + 4z + 5 = 0$, b) $\frac{1+i}{z} = \frac{2-3i}{\overline{z}}$,

c) $\overline{z+i} - z + i = 0$, d) $z^4 = (1-i)^4$,

e) $-(iz)^6 + (i-1)(iz)^3 + 2(i-1) = 0$.

Zadanie 6. Rozwiąż równania stosując odpowiednią postać liczby zespolonej:

a) $i(\overline{z})^4 z^2 = -4(|z|)^2$, b) $\overline{\overline{z}z^4} = z|z|^2$,

c) $z^2|z|^{-1}\overline{z} + 3|z|^2(\overline{z})^{-1} = (2-2\sqrt{3}i)z^{-1}$,

Zadanie 7. Wykaż, że:

$$\cos\frac{\pi}{11} + \cos\frac{3\pi}{11} + \cos\frac{5\pi}{11} + \cos\frac{7\pi}{11} + \cos\frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2}.$$

Zadanie 8. Udowodnij, że $\left(\frac{1+i\operatorname{tg}\alpha}{1-i\operatorname{tg}\alpha}\right)^n = \frac{1+i\operatorname{tg} n\alpha}{1-i\operatorname{tg} n\alpha}$ gdzie $\alpha \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Zadanie 9. Niech $\omega = e^{\frac{2\pi}{5}i}$ oraz $\eta = \omega + \frac{1}{\omega}$. Udowodnij, że $\eta^2 + \eta = 1$. Korzystając z tej równości oblicz wartość $\cos\frac{2\pi}{5}$.