

Zadanie 1. Zaznacz poniższe zbiory na płaszczyźnie zespolonej:

- a) $A = \{z \in \mathbb{C} : z\bar{z} + (3 - 2i)z + (3 + 2i)\bar{z} + 1 = 0\}$,
b) $A = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(iz - 2) \leq 0 \wedge \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{2}\}$,
c) $A = \{z \in \mathbb{C} : \arg z^6 = \frac{\pi}{2}\}$,
d) $A = \{z \in \mathbb{C} : \left| \frac{z^2 + 4}{z - iz + 2i + 2} \right| < \frac{\operatorname{Im}[(\sqrt{2} + \sqrt{3}i)^2]}{4} \wedge \frac{\pi}{6} \leq \arg(\overline{z - 3i}) < \frac{\pi}{3}\}$,

Zadanie 2. Oblicz:

- a) $(2\sqrt{3} - 2i)^9$, b) $(\sin \frac{3\pi}{7} - i \cos \frac{3\pi}{7})^{21}$, c) $\sqrt{12 - 16i}$,
d) $\sqrt[4]{-4}$, e) $\sqrt[3]{2 + 2i}$, f) $\sqrt{24 - 10i}$,

Zadanie 3. Odgadując jeden z pierwiastków oblicz pozostałe:

- a) $\sqrt[3]{-64i}$, b) $\sqrt[3]{(2 - 2i)^9}$.

Zadanie 4. Korzystając z wzorów de Moivre'a wyraż:

- a) $\operatorname{tg} 6x$ przez funkcję $\operatorname{tg} x$,
b) $\sin 4x$ oraz $\cos 4x$ przez funkcje $\sin x$, $\cos x$.

Zadanie 5. Rozwiąż równania:

- a) $\frac{7 - 2\sqrt{7}i}{|z| - z} = 1$, b) $|z| + z = 4 + 2i$,
c) $z^4 = (\bar{z})^4$, d) $z^2 + iz + 3i + 1 = 0$,
e) $(z^4 + 1 - i)[iz^2 + (-3 - i)z - 8i - 1] = 0$,

Zadanie 6. Rozwiąż równania stosując odpowiednią postać liczby zespolonej:

- a) $z^7 = \bar{z}(1 - i)$, b) $(iz)^3 = (\frac{5}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})^9$,
c) $|z|z - \frac{|z(1 + 2\sqrt{2}i)|}{\bar{z}} = (2\sqrt{3}i - 2)z^{-2}$.

Zadanie 7. Wykaż, że:

$$\sin \frac{\pi}{5} + \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{3\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{10}.$$