1) **Macierzą** rozmiaru $n \times m$ nazywamy każde odwzorowanie $A\colon \{1,\dots,n\} \times \{1,\dots,m\} \to \mathbb{K}$, gdzie na potrzeby zestawów $4,5$ przyjmujemy $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ lub $\mathbb{K}=\mathbb{C}$. Wartość tego odwzorowania dla argumentu (i,j) nazywamy elementem macierzy i oznaczamy a_{ij}. Każde takie odwzorowanie utożsamiamy z zapisem:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} = [a_{ij}]_{n\times m} = A_{n\times m}.$$

2) Niech $A=[a_{ij}], B=[b_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.
Sumą macierzy A i B nazywamy macierz $A+B=[a_{ij}+b_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

3) Niech $A=[a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$.
Iloczynem macierzy A **przez skalar** α nazywamy macierz $\alpha \cdot A = [\alpha \cdot a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$.

4) Niech $A=[a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$, $B=[b_{ij}] \in \mathbf{M}_{m\times k}(\mathbb{K})$.
Iloczynem macierzy A i B nazywamy macierz $C = A \cdot B = [c_{ij}]_{n\times k} \in \mathbf{M}_{n\times k}(\mathbb{K})$, której elementy są określone wzorem:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{l=1}^{m} a_{il}b_{lj}.$$

5) Iloczyn macierzy jest łączny oraz rozdzielny prawo- i lewostronnie względem dodawania. Nie jest natomiast przemienny.

6) Niech $A=[a_{ij}] \in \mathbf{M}_{n\times m}(\mathbb{K})$. Macierzą **transponowaną** do macierzy A nazywamy macierz $B=[b_{ij}] \in \mathbf{M}_{m\times n}(\mathbb{K})$, gdzie $b_{ij}=a_{ji}$ dla $i \in \{1,\dots,m\}$, $j \in \{1,\dots,n\}$ i oznaczamy $B = A^T$.

7) Macierz kwadratową A nazywamy **symetryczną** jeżeli $A=A^T$, zaś **antysymetryczną (skośnie symetryczną)** jeżeli $A=-A^T$.

8) **Wyznacznikiem stopnia** n macierzy kwadratowej $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$, który oznaczamy $\det A$ lub $|A|$ nazywamy funkcję

$$\det\colon \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) \ni A \mapsto \det A \in \mathbb{K},$$

która każdej macierzy kwadratowej A przypisuje wartość $\det A$ określoną następująco:

a) dla $n=1$: $\det A = a_{11}$,
b) dla $n \geqslant 2$: $\det A = (-1)^{1+1}a_{11}A_{11} + (-1)^{1+2}a_{12}A_{12} + \ldots + (-1)^{1+n}a_{1n}A_{1n}$, gdzie A_{ij} to wyznacznik macierzy kwadratowej powstałej z macierzy A przez wykreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny.

9) Niech $A=[w_1,\dots,w_n]^T \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$. Wtedy:

(a) $\det[w_1,\dots,\alpha w_i,\dots,w_n]^T = \alpha \det[w_1,\dots,w_i,\dots,w_n]^T$,
(b) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$,
(c) $\exists i_0 \in \{1,\dots,n\}\colon w_{i_0} = \overline{0} \Rightarrow \det A = 0$,
(d) $\det[w_1,\dots,w_i+\alpha w_j,\dots,w_n]^T = \det[w_1,\dots,w_n]^T = \det A$,
(e) $\det[w_1,\dots,w_i,\dots,w_j,\dots,w_n]^T = -\det[w_1,\dots,w_j,\dots,w_i,\dots,w_n]^T$,
(f) $\exists i_0 \neq j_0 \in \{1,\dots,n\}\colon w_{i_0} = w_{j_0} \Rightarrow \det A = 0$,

(g) $\det[w_1, \ldots, w_i^1 + w_i^2, \ldots, w_n] = \det[w_1, \ldots, w_i^1, \ldots, w_n] + \det[w_1, \ldots, w_i^2, \ldots, w_n]$.

(h) $\det[w_1, \ldots, \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{i-1} w_{i-1} + \alpha_{i+1} w_{i+1} + \cdots + \alpha_n w_n, \ldots, w_n] = 0$

(i) $\det[w_1, \ldots, w_i + \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_{i-1} w_{i-1} + \alpha_{i+1} w_{i+1} + \cdots + \alpha_n w_n, \ldots, w_n] = \det[w_1, \ldots, w_n]$.

10) **Minorem** stopnia k macierzy $A \in \mathbf{M}_{n\times m}$ nazywamy wyznacznik dowolnej podmacierzy kwadratowej rozmiaru $k \times k$ ($k \leqslant \min\{n, m\}$), czyli powstałej z A przez wykreślenie $(n-k)$ wierszy i $(m-k)$ kolumn.

11) Niech $A = [a_{ij}]_{n\times n} \in \mathbf{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$. Wtedy:

a) $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad \det A = a_{i1} \cdot A_{i1} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$ (rozwinięcie Laplace'a względem i-tego wiersza)

b) $\forall j \in \{1, \ldots, n\} \quad \det A = a_{1j} \cdot A_{1j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (rozwinięcie Laplace'a względem j-tej kolumny).

Zadanie 1. Dane są macierze:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} i & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -i \\ 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 1 \\ -i & i+1 & -1 \\ 2 & 2-i & i \end{bmatrix}$$

Oblicz:

a) $C^T A + 3AB^T$, b) $2BA^T - (CA)^T$, c) $D^2 - C^2 + AA^T$, d) $A^T DA - B^3$.

Zadanie 2. Wiedząc, że $\begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = -1$ wykaż, że: $\begin{vmatrix} a_1x + c_1 & b_1y + c_1 & c_1z \\ a_2x + c_2 & b_2y + c_2 & c_2z \\ a_3x + c_3 & b_3y + c_3 & c_3z \end{vmatrix} = xyz.$

Zadanie 3. Oblicz wartość wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} 1 + x_1y_1 & 1 + x_1y_2 & 1 + x_1y_3 \\ 1 + x_2y_1 & 1 + x_2y_2 & 1 + x_2y_3 \\ 1 + x_3y_1 & 1 + x_3y_2 & 1 + x_3y_3 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 4. Wyznacz macierze dopełnień algebraicznych dla poniższych macierzy, a następnie oblicz ich wyznaczniki korzystając z twierdzenia Laplace'a:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -5 \\ 0 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Zadanie 5. Oblicz wyznacznik n-tego stopnia:

$$\text{a)} \begin{vmatrix} 1 & n & \dots & n & n \\ n & 2 & \dots & n & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & \dots & n-1 & n \\ n & n & \dots & n & n \end{vmatrix}, \quad \text{b)} \begin{vmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & x & y & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{vmatrix}, \quad \text{c)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \dots & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 & \dots & 1 & 3 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n & n \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 \end{vmatrix}.$$

Zadanie 6. Jeśli stopień wyznacznika $n = 2k$ jest parzysty udowodnij, że:

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & \dots & 0 & b \\ 0 & a & 0 & \dots & b & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & b & 0 & \dots & a & 0 \\ b & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{vmatrix} = (a^2 - b^2)^k$$